REGULARITÄT UND STOCHASTISCHE INTEGRATION VON SEMIMARTINGALEN MIT WERTEN IN EINEM BANACHRAUM

DISSERTATION

dem Fachbereich Mathematik

der Eberhard–Karls–Universität zu Tübingen

zur Erlangung des Grades eines Doktors

der Naturwissenschaften

vorgelegt von

Alfred Kußmaul

aus Stuttgart

1978

REGULARITÄT UND STOCHASTISCHE INTEGRATION VON SEMIMARTINGALEN MIT WERTEN IN EINEM BANACHRAUM

DISSERTATION

dem Fachbereich Mathematik

der Eberhard–Karls–Universität zu Tübingen

zur Erlangung des Grades eines Doktors

der Naturwissenschaften

vorgelegt von

Alfred Kußmaul

aus Stuttgart

1978

UNIV.
LEIDEN
BIBL.

Tag der mündlichen Qualifikation : 18. August 1978

Dekan	:	Prof. Dr. W. Kaup
1. Berichterstatter	:	Prof. Dr. H. Heyer
2. Berichterstatter	:	Prof. Dr. M. Wolff

Inhaltsverzeichnis

Einleitung 1

§1 Stochastische Prozesse mit Werten in einem Banachraum, die Grundlagen

1 Meßbarkeit von Prozessen 4

2 Verallgemeinerte Martingale 7

§2 Zur Integrationstheorie reeller verallgemeinerter Martingale

1 Stochastische Integration bezüglich summierbarer Prozesse 18

2 Der Projektionssatz und Prozesse integrabler Variation .. 25

3 Das stochastische Integral bezüglich quadratisch integrierbarer Martingale 31

4 Die Itô-Formel im endlichdimensionalen Fall 34

§3 Verallgemeinerte Martingale mit Werten in einem (geordneten) Banachraum als Bilder reeller stochastischer Prozesse

1 Bochner-integrierbare Funktionen 44

2 Banachraum-wertige Quasimartingale als Bilder reeller Quasimartingale 51

3 Regularität und Zerlegungssätze für verallgemeinerte Martingale 60

§4 Stochastische Integration bezüglich Hilbertraum-wertiger Semimartingale und die allgemeine Itô-Formel

1 Stochastische Integration bezüglich Banachraum-wertiger Prozesse 76

2 Prozesse von integrabler Variation 80

3 Hilbertraum-wertige quadratisch integrierbare Martingale 84

4 Die Itô-Formel für Semimartingale mit Werten in einem Hilbertraum 91

Literaturverzeichnis 101

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41536519_0069

Einleitung: Das Analogon zum Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung ist in der Theorie der stochastischen Integration die Itô-Formel. Diese Formel ist für eine zweifach differenzierbare Funktion F und einen stochastischen Prozeß X eine Darstellung des Prozesses FoX als stochastisches Integral. Für den Fall, daß X und F reellwertig sind, dürfte wohl die Entwicklung einer befriedigenden Form dieser Formel mit der in [13], Chp. IV, 21 gegebenen Version ihren Abschluß erreicht haben. Diese Beurteilung gründet sich vor allem auf die folgenden Tatsachen:
i) An F ist nur die offensichtlich nicht abschwächbare Bedingung gestellt, zweifach stetig differenzierbar zu sein.
ii) Die Klasse der Semimartingale X, für die die Formel definiert ist, ist gerade die kleinste Klasse von Prozessen, welche Martingale und mit jedem Prozeß X auch den Prozeß FoX enthält.

Bei allen bisher für Prozesse mit Werten in einem Hilbertraum H angegebenen Versionen der Itô-Formel ist nicht nur die Funktion F erheblichen Einschränkungen unterworfen, sondern auch die Klasse der Prozesse soweit eingeschränkt worden, daß sie nicht einmal alle Martingale enthält. Der Ausgangspunkt für die vorliegende Arbeit war der Versuch, auch in diesem Fall eine Itô-Formel anzugeben, die den Bedingungen i) und ii) genügt. Das Ergebnis ist Satz 4.1 des vierten Paragraphen.

Die Definition von H-wertigen Semimartingalen findet sich in §2, 4.1. Die Berechtigung, die dort definierten Prozesse als Semimartingale zu bezeichnen, leitet sich aus §2, Lemma 4.2 her. Für diese Prozesse konnte die in [7], §12 für den Fall $H = \mathbb{R}$ entwickelte lokale Theorie des stochastischen Integrals direkt übertragen werden. (Siehe §4,1). Das entscheidende Hilfsmittel hierzu ist die Verallgemeinerung (§3,3.7 Korollar) des im Fall $H = \mathbb{R}$ wohlbekannten Struktursatzes über die lokale Zerlegbarkeit eines

Semimartingals in ein quadratisch integrierbares Martingal und einen Prozeß von integrabler Variation. Um diesen Struktursatz zu beweisen, wird in §3 gezeigt, daß zu jedem Quasimartingal Q mit Werten in einem Banachraum E mit Radon-Nikodym Eigenschaft ein Quasimartingal Q' und eine stetige lineare Abbildung ψ von dem Raum ℓ^1 der summierbaren reellen Folgen in den Raum E mit $Q = \psi \circ Q'$ existieren. (Siehe §3, Satz 2.8). Die Kompaktheitsaussage über die Pfade eines Quasimartingals in §3, Satz 2.6 gestattet es, wenn man Q' als reellwertigen Prozeß interpretiert, Regularitäts-, Meßbarkeits- und Strukturaussagen für das reelle Quasimartingal Q' direkt auf Q zu übertragen.

Mit Hilfe dieser Technik werden die Regularitäts- und Zerlegungssätze des §3,3 für E-wertige Quasimartingale bewiesen. Für den Fall eines Hilbertraumes H ersetzt man ℓ^1 durch ℓ^2 und kann so mit der oben beschriebenen Technik die Eigenschaften des stochastischen Integrals bezüglich quadratisch integrierbarer, reeller Martingale auf den Fall H-wertiger übertragen. (Siehe §4, 3.1 - 3.3). Auf die gleiche Art erhält man auch §4, Satz 3.7 über die Zerlegbarkeit eines H-wertigen Semimartingals in einen stetigen und einen rein unstetigen Anteil, welche eine wichtige Voraussetzung dafür ist, die Itô-Formel in §4, Satz 4.1 elegant formulieren zu können.

§4, Satz 2.4 und das Korollar 2 zu §4, Satz 3.1 erlauben es, diese Formel durch Approximation des Prozesses X durch Prozesse, die Werte in einem endlichdimensionalen Unterraum von H annehmen, direkt aus der für den endlichdimensionalen Fall bekannten Formel herzuleiten. Daß an die Funktion F der Itô-Formel in §4, Satz 4.1 keine über die zweifach stetige Differenzierbarkeit hinausgehende Forderungen gestellt werden müssen, ist wesentlich eine Folgerung aus §3, Satz 2.6 .

Der Paragraph 1 enthält grundlegende Definitionen und einige technische Resultate. Die Schwerpunkte des zweiten Paragraphen sind Lemma 4.2 und Satz 1.3, der eine Verschärfung von [7], Theorem 12.13 darstellt. Die restlichen Resultate sind Zitate oder Umformulierungen bekannter Ergebnisse. Auf Beweise wird deshalb weitgehend verzichtet.

Herrn Prof. Dr. H. Heyer möchte ich für die Anregung zu dieser Arbeit, für seine Kritik und Ratschläge herzlich danken.

§1 Stochastische Prozesse mit Werten in einem Banachraum, die Grundlagen

Für die gesamte Arbeit werden weitgehend die Bezeichnungen und Definitionen von [7] benutzt. Dort sind auch die Hilfsmittel aus der Theorie reeller stochastischer Prozesse zu finden, die in der vorliegenden Arbeit verwendet werden und auf die, soweit es sich um klassische Resultate handelt, nicht besonders hingewiesen wird. Abweichungen von [7] bei Definitionen werden ausdrücklich vermerkt.

1. Meßbarkeit von Prozessen

Für die ganze Arbeit sei eine stochastische Basis $\mathfrak{B}$ festgelegt, d.h. ein Quintupel $(\Omega, \mathfrak{F}, P, (\mathfrak{F}_t), \mathbb{R}_+)$, wobei $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ ein vollständiger Wahrscheinlichkeitsraum ist und $(\mathfrak{F}_t)$ eine isotone rechtsseitig stetige Familie von σ-Unteralgebren von $\mathfrak{F}$, derart daß $\mathfrak{F}_0$ alle P-Nullmengen von $\mathfrak{F}$ enthält. t durchläuft dabei die positive Halbgerade $\mathbb{R}_+$.

Wenn nichts anderes gesagt wird, werden Stoppzeiten immer als Stoppzeiten bezüglich der Familie $(\mathfrak{F}_t)$ verstanden. Sei nun eine Stoppzeit T gegeben. Wir definieren $\mathfrak{F}_T$ als die σ-Algebra der Ereignisse, die bis zur Zeit T stattfinden und $\mathfrak{F}_{T-}$ als die σ-Algebra der Ereignisse, die strikt vor T stattfinden. Es ist also $\mathfrak{F}_T = \{F \in \mathfrak{F} : F \cap \{T \leq t\} \in \mathfrak{F}_t \text{ für alle } t \in \mathbb{R}_+\}$, und $\mathfrak{F}_{T-}$ ist die σ-Algebra, die von allen Mengen der Form $F \cap \{t > T\}$ erzeugt wird, wobei $t \in \mathbb{R}_+$ und F ein Element von $\mathfrak{F}_t$ ist. Für ein Element $F \in \mathfrak{F}_T$ definiere man die Zufallsvariable T_F durch $T_F(\omega) = T(\omega)$ für $\omega \in F$ und $T_F(\omega) = \infty$ für $\omega \in F^c$. Man beachte, daß für alle $F \in \mathfrak{F}_T$ T_F eine Stoppzeit ist.

Für zwei Stoppzeiten $S \leq T$ definieren wir das stochastische

Intervall $]\!]S,T]\!]$ als $]\!]S,T]\!] = \{(t,\omega) \in \mathbb{R}_+ \times \Omega : S(\omega) < t \leq T(\omega)\}$. Analog sind die stochastischen Intervalle $[\![S,T]\!]$, $[\![S,T[\![$ und $]\!]S,T[\![$ definiert. Wir schreiben $[\![T]\!]$ für $[\![T,T]\!]$. Man beachte, daß Stoppzeiten zwar Werte in der erweiterten positiven Halbgerade $\bar{\mathbb{R}}_+$ annehmen können, daß stochastische Intervalle jedoch stets Teilmengen von $\mathbb{R}_+ \times \Omega$ sind. Zur Illustration seien einige einfache Beispiele für stochastische Intervalle angeführt: Es seien $s \leq t$ Elemente von $\mathbb{R}_+$. Wir bezeichnen mit s bzw. t die Stoppzeiten, die identisch gleich s bzw. t sind. Für ein Element $F \in \mathfrak{F}_s$ sind dann auch s_F bzw. t_F Stoppzeiten, und wir haben $]\!]s_F, t_F]\!] =]s,t] \times F$ und $[\![s_F]\!] = \{s\} \times F$. Insbesondere sei auf das öfters auftretende stochastische Intervall $[\![0_F]\!] = \{0\} \times F$ $(F \in \mathfrak{F}_0)$ hingewiesen.

Es sei nun E ein Banachraum. Eine Abbildung X von $\mathbb{R}_+ \times \Omega$ nach E wird als <u>stochastischer Prozeß</u> mit Werten in E bezeichnet, wenn für jedes $t \in \mathbb{R}_+$ die Abbildung $X_t : \omega \longrightarrow X(t,\omega)$ von Ω nach E schwach meßbar ist, d.h. wenn $x' \circ X_t$ $\mathfrak{F}$-meßbar für jedes Element x' des stetigen Dualraumes E' von E ist. Für festes $\omega \in \Omega$ heißt die Abbildung $t \longrightarrow X(t,\omega)$ ein Pfad des Prozesses X. Wir schreiben auch $X_t(\omega)$ an Stelle von $X(t,\omega)$ und $X = (X_t)$. Falls $E = \mathbb{R}$ ist, wird X als reeller Prozeß bezeichnet. Falls X ein E-wertiger und Y ein reeller Prozeß ist, definieren wir YX als den stochastischen Prozeß, der durch $YX(t,\omega) = Y(t,\omega)X(t,\omega)$ gegeben ist. Insbesondere werden regelmäßig Prozesse der Form $\chi_{]\!]S,T]\!]} X$ auftreten, wobei $]\!]S,T]\!]$ ein stochastisches Intervall ist. Als weitere Besonderheit sei erwähnt, daß für eine E-wertige Zufallsvariable u der Prozeß mit konstanten Pfaden $X(t,\omega) = u(\omega)$ kurz mit u bezeichnet wird.

Ein E-wertiger Prozeß X heiße meßbar, wenn die Abbildung X schwach meßbar bezüglich der σ-Algebra $\mathcal{B} \otimes \mathcal{E}$ ist, wobei $\mathcal{B}$ die Borel-σ-Algebra auf $\mathbb{R}_+$ ist. Analog zum Vorgehen im Fall reeller stochastischer Prozesse wollen wir noch zwei weitere Meßbarkeitsbedingungen für stochastische Prozesse einführen. Dazu betrachten wir die folgenden beiden Ringe von Teilmengen von $\mathbb{R}_+ \times \Omega$: $\mathcal{R}_w$ sei der Ring, der von stochastischen Intervallen der Form $[\![S,T[\![$ erzeugt wird und $\mathcal{R}_p$ der Ring, der von stochastischen Intervallen der Form $[\![0_F]\!] = \{0\} \times F$ $(F \in \mathcal{F}_0)$ und $]\!]S,T]\!]$ erzeugt wird. Im ersten Fall durchläuft dabei (S,T) alle Paare von Stoppzeiten mit $S \leq T$, im zweiten Fall nur diejenigen Paare von Stoppzeiten, bei denen S und T nur endlich viele Werte in $\mathbb{R}_+$ annehmen. Stoppzeiten mit der letzteren Eigenschaft werden als einfache Stoppzeiten bezeichnet. Die σ-Algebren Σ_w bzw. Σ_p sind als die von $\mathcal{R}_w$ bzw. $\mathcal{R}_p$ erzeugten σ-Algebren definiert. Σ_w ist die σ-Algebra der optionalen Mengen ("well measurable sets" in [7]), und Σ_p ist die σ-Algebra der prävisiblen Mengen. Stochastische Prozesse heißen optional bzw. prävisibel, wenn sie meßbar bezüglich Σ_w bzw. Σ_p (im schwachen Sinne) sind. Wir merken an, daß optionale Prozesse adaptiert sind, d.h. daß für jedes $t \in \mathbb{R}_+$ die Zufallsvariable X_t schwach meßbar bezüglich $\mathcal{F}_t$ ist. Auf der anderen Seite ist jeder adaptierte Prozeß mit (schwach) rechtsseitig stetigen Pfaden optional und jeder adaptierte Prozeß mit (schwach) linksseitig stetigen Pfaden prävisibel. Das folgt unmittelbar aus den entsprechenden Resultaten für reelle stochastische Prozesse. (Siehe z.Bsp. [7], §7, auch für weitere Details). Wir wollen noch bemerken, daß $\Sigma_p \subseteq \Sigma_w$ gilt, da jede beschränkte Stoppzeit T das Infimum einer antitonen Folge (T_n) von Stoppzeiten ist, die echt größer als T auf ganz Ω sind. Damit ist jeder präsi-

sible Prozeß optional.

Es seien nun zwei Prozesse X und Y mit Werten in E gegeben. X und Y heißen nicht unterscheidbar, wenn P-fast sicher die Pfade von X und Y übereinstimmen. In Zukunft betrachten wir nicht unterscheidbare Prozesse als ein und dasselbe Objekt, d.h. wir gehen zu Äquivalenzklassen nicht unterscheidbare Prozesse über. Insbesondere heißt dann Eindeutigkeit immer nur Eindeutigkeit bis auf einen nicht unterscheibaren Prozeß.

Jeder stochastische Prozeß X definiert eine Abbildung $t \longrightarrow X_t$ von $\mathbb{R}_+$ in den Raum der E-wertigen Zufallsvariablen, die wieder mit X bezeichnet wird. Allerdings werden wir uns das Symbol $t \longrightarrow X_t$ für Abbildungen dieser Art vorbehalten, und wir werden P-fast sicher gleiche Zufallsvariablen identifizieren, so daß die Abbildung $t \longrightarrow X_t$ wohldefiniert ist. Auf der anderen Seite können wir jeder Abbildung $t \longrightarrow X_t$ in den Raum von Äquivalenzklassen E-wertiger Zufallsvariablen einen stochastischen Prozeß X zuordnen, indem wir $X(t,.)$ als eine Version von X_t definieren. X heißt dann eine Modifikation von $t \longrightarrow X_t$. Die Modifikationen sind im allgemeinen nicht eindeutig bestimmt. Um Eindeutigkeit zu erreichen, muß man in der Regel noch weitere Forderungen an die Modifikation stellen, wie zum Beispiel rechtsseitige Stetigkeit der Pfade.

2 Verallgemeinerte Martingale

Es seien eine stochastische Basis $\mathfrak{A}$ und ein Banachraum E gegeben wie in 1. Wir bezeichnen mit $L_E^1(P)$ den Banachraum der Äquivalenzklassen P-fast sicher gleicher, E-wertiger Bochner-integrierbarer Funktionen. Weiterhin sei ein stochastischer Prozeß $Q = (Q_t)$ mit Werten in E gegeben, der adaptiert ist und $Q_t \in L_E^1(P)$ für alle $t \in \mathbb{R}_+$ erfüllt.

Wir betrachten die folgenden Aussagen über Q :

(1) Q hat rechtsseitig stetige Pfade mit linksseitigen Limiten.

(2) Die Abbildung $t \longrightarrow X_t$ von $\mathbb{R}_+$ nach $L^1_E(P)$ ist rechtsseitig stetig.

(3) Es existiert eine Konstante $c \geq 0$, so daß $\Sigma_i \| Q_{t_{i+1}} - Q_{t_i} \|_1 \leq c$ gilt,für jede isotone endliche Folge (t_i) von Elementen von $\mathbb{R}_+$.

(4) Die Familie $\{ Q_t : t \in \mathbb{R}_+ \}$ ist normbeschränkt in $L^1_E(P)$, und es existiert eine Konstante $c \geq 0$, so daß $\Sigma_i \| E(Q_{t_{i+1}} - Q_{t_i} \mid \mathfrak{F}_{t_i}) \|_1 \leq c$ gilt,für jede isotone endliche Folge (t_i) von Elementen von $\mathbb{R}_+$.

Wenn Q die Bedingungen (2) und (3) erfüllt,dann heißt Q ein Prozeß von integrabler Variation. Erfüllt Q die Bedingungen (2) und (4) ,dann heißt Q ein Quasimartingal. Ist die Bedingung (4) darüberhinaus mit $c = 0$ erfüllt,so wird Q ein Martingal genannt. Q heißt normal,wenn die Bedingung (1) erfüllt ist.

Es seien nun Q ein adaptierter,normaler stochastischer Prozeß und T eine Stoppzeit. Dann ist die durch $Q_T(\omega) := Q(T(\omega), \omega)$ definierte Zufallsvariable Q_T schwach $\mathfrak{F}_T$-meßbar. Insbesondere ist der zur Zeit T gestoppte Prozeß Q^T, definiert durch $Q^T(t,\omega) = Q_{T \wedge t}(\omega)$,ebenfalls ein adaptierter normaler Prozeß. Ein stochastischer Prozeß Q heiße lokales Martingal,wenn Q normal ist,und wenn eine isotone Folge (T_n) von Stoppzeiten existiert mit $\lim_n T_n = \infty$, derart daß für jedes n der zur Zeit T_n gestoppte Prozeß Q^{T_n} ein Martingal ist.

Wir merken noch an,daß (4) mit $c = 0$ die Bedingung (2) impliziert,eine Tatsache,die zumindest für den Fall $E = \mathbb{R}$ wohlbekannt ist. Man beachte weiterhin,daß in [7] Quasimartingale

und Prozesse von integrabler Variation als normale Prozesse vorausgesetzt wurden. Auf diese Voraussetzung wurde hier verzichtet,da wir später im Zusammenhang mit Konvergenz- und Struktursätzen auch die Existenz einer normalen Modifikation beweisen wollen. Diese Allgemeinheit der Voraussetzungen bringt jedoch auch eine Schwierigkeit mit sich: Für eine Stoppzeit T braucht die oben definierte Zufallsvariable Q_T nicht meßbar sein,wenn Q ein Quasimartingal bzw. ein Prozeß von integrabler Variation ist. Aus Gründen,die im späteren Verlauf der Arbeit offensichtlich werden,ist es jedoch schon an dieser Stelle wünschenswert, für beliebige Stoppzeiten T eine Variable $Q_T \in L^1_E(P)$ zur Verfügung zu haben,die dann natürlich anders definiert werden muß.

Bevor wir uns diesem Problem zuwenden,wollen wir die "von einem Quasimartingal Q erzeugten Maße" studieren. Sei zunächst $X = (X_t)$ ein stochastischer Prozeß mit Werten in dem Banachraum E , derart daß für jedes $t \in \mathbb{R}_+$ X_t ein Element von $L^1_E(P)$ ist. Für jede endliche einfache Stoppzeit T ist X_T ein wohldefiniertes Element von $L^1_E(P)$. Damit hat die durch $I_X(\llbracket 0_F \rrbracket) = \chi_F X_0$ und $I_X(\rrbracket S,T \llbracket) = X_T - X_S$ definierte Mengenfunktion I_X genau eine additive Fortsetzung auf den Ring $\mathcal{R}_p$ (siehe 1). Diese Fortsetzung wird auch mit I_X bezeichnet und heißt <u>das von X erzeugte Prämaß</u>. I_X ist also auf $\mathcal{R}_p$ definiert und hat Werte in $L^1_E(P)$. Damit ist auch die Mengenfunktion $A \longrightarrow E(I_X(A))$, $A \in \mathcal{R}_p$, wohldefiniert mit Werten in E . Wir schreiben i_X für die letztere Mengenfunktion und bezeichnen i_X als das <u>gemittelte von X erzeugte Prämaß</u>.(In [7] wird diese Mengenfunktion mit μ_X bezeichnet).

Daß das von ihnen erzeugte gemittelte Prämaß von beschränkter Variation ist,unterscheidet Quasimartingale von den übrigen

adaptierten Prozessen.Bevor wir darangehen,diese Tatsache zu beweisen,sei an die Definitionen von Semivariation und Variation eines E-wertigen Maßes μ auf einem Ring $\mathcal{R}$ erinnert.Sei A ein Element von $\mathcal{R}$. Dann ist die Semivariation von μ auf A definiert durch $\operatorname{svar}(\mu,A) = \sup \{\| \Sigma_{i=1}^{n} \alpha_i \mu(A_i)\|\}$ und die Variation von μ auf A durch $\operatorname{var}(\mu,A) = \sup \{\Sigma_{i=1}^{n} \|\mu(A_i)\|\}$. In beiden Fällen wird das Supremum über alle Partitionen von A in eine endliche Familie von Elementen $A_i \in \mathcal{R}$ und über alle reelle Zahlen α_i mit $|\alpha_i| \leq 1$ genommen. Wenn μ ein reelles Maß ist,schreiben wir $|\mu|(A)$ an Stelle von $\operatorname{var}(\mu,A)$.

2.1 Lemma: Es seien zwei Elemente $s \leq t$ von $\mathbb{R}_+$ gegeben.Dann stimmen die $L_E^1(P)$-Norm $\|E(X_t - X_s \mid \mathcal{F}_s)\|_1$ und $\sup \{\Sigma_i \|E(\chi_{F_i}(X_t - X_s))\|: (F_i)$ endliche Partition von Ω in Mengen $F_i \in \mathcal{F}_s\}$ überein . Insbesondere gilt die Ungleichung $\operatorname{var}(i_X,]\!]s,t]\!]) \geq \|E(X_t - X_s \mid \mathcal{F}_s)\|_1$.

Beweis: Der Beweis des ersten Teils des Lemmas folgt aus der Tatsache,daß für ein $\mathcal{F}_s$-meßbares $u \in L_E^1(P)$ die Totalvariation des Maßes u dP auf $\mathcal{F}_s$ und die $L_E^1(P)$-Norm von u übereinstimmen. Für den zweiten Teil genügt es zu beobachten,daß $\Sigma_i \| E(\chi_{F_i}(X_t - X_s))\| = \Sigma_i \| i_X(]\!]s_{F_i}, t_{F_i}]\!])\|$ für alle oben angesprochenen Partitionen gilt.

2.2 Satz: Sei $X = (X_t)$ ein adaptierter stochastischer Prozeß mit Werten in einem Banachraum E , derart daß die Menge $\{X_t: t \in \mathbb{R}_+\}$ beschränkt in $L_E^1(P)$ ist und $\lim_{s \searrow t} X_s = X_t$ für alle $t \in \mathbb{R}_+$ (in $L_E^1(P)$) gilt. Genau dann ist X ein Quasimartingal, wenn das von X erzeugte gemittelte Prämaß i_X von beschränkter Variation ist.

Beweis: Daß die Bedingung hinreichend ist,folgt unmittelbar aus

dem zweiten Teil des vorigen Lemmas und der Tatsache,daß die Variation einer additiven Mengenfunktion additiv ist. Um die Notwendigkeit zu beweisen,können wir ohne Einschränkung der Allgemeinheit $X_0 = 0$ annehmen. Sei $A \in \mathcal{Q}_p$ eine disjunkte Vereinigung $A = \bigcup_n A_n$ einer endlichen Familie (A_n) von Elementen von $\mathcal{Q}_p$. Dann gibt es eine isotone Folge $t_1 \leq t_2 \leq \ldots \leq t_m$ von Elementen von $\mathbb{R}_+$ und für jedes $i = 1,\ldots,m$ eine Familie $F_{i,1},\ldots,F_{i,k_i}$ von Elementen von $\mathfrak{F}_{t_i}$, so daß $(]t_i,t_{i+1}] \times F_{i,j})$ $(i=1,\ldots,m$, $j=1,\ldots,k_i)$ eine disjunkte Familie von Elementen von $\mathcal{Q}_p$ ist,die eine Verfeinerung der Zerlegung (A_n) von A darstellt. Also gilt

$$\Sigma_n \|i_X(A_n)\| \leq \Sigma_{i,j} \|i_X(]t_i,t_{i+1}] \times F_{i,j})\|$$
$$= \Sigma_{i,j} \|E[\gamma_{F_{i,j}}(X_{t_{i+1}} - X_{t_i})]\| .$$

Somit ist $\Sigma_n \|i_X(A_n)\| \leq \Sigma_i \|E(X_{t_{i+1}} - X_{t_i} \mid \mathfrak{F}_{t_i})\|_1$ nach dem ersten Teil des Lemmas und,da X ein Quasimartingal ist,gilt $\Sigma_n \|i_X(A_n)\| \leq c$ für eine Konstante c . Da A und die disjunkte Zerlegung (A_n) von A beliebig waren,folgt die Beschränktheit der Variation von i_X .

Bemerkung: Mit Hilfe des Satzes sind E-wertige Quasimartingale analog zum reellen Fall durch die von ihnen erzeugten gemittelten Prämaße charakterisiert. Ebenso wie im Falle reeller stochastischer Prozesse gilt auch,daß X genau dann ein Martingal ist,wenn i_X von der Menge $[\![0]\!]$ getragen wird. Diese Tatsache wurde von Pellaumail [15] ausgenützt, um Strukturs̈atze für Quasimartingale zu beweisen (siehe auch [12] und [7] für den Fall reeller Prozesse). Dieser sehr wichtige Aspekt des Prämaßes i_X wird jedoch in der vorliegenden Arbeit nicht studiert,da es die im dritten Paragraphen entwickelte Methode erlaubt,Struktur-

sätze für vektorwertige Quasimartingale direkt aus den entsprechenden Sätzen für reelle Quasimartingale abzuleiten. Einer der Hauptgründe für die Einführung von I_X liegt darin, daß stochastische Integration in mehr oder weniger versteckter Form immer Integration bezüglich des von X erzeugten Prämaßes I_X oder einer Fortsetzung von I_X bedeutet.

Wir wollen das, soweit es an dieser Stelle möglich ist, am Beispiel reeller Integranden erläutern. Sei $\mathcal{S}$ die Menge der reellen $\mathfrak{A}_p$-meßbaren einfachen Prozesse, d.h. der Prozesse der Form $Z = \sum_i \beta_i \chi_{[\![S_i, T_i]\!]} + \beta_0 \chi_F \chi_{[\![0]\!]}$ ($F \in \mathfrak{F}_0$, $S_i \leq T_i$ einfache Stoppzeiten, $\beta_i \in \mathbb{R}$). $\mathcal{S}$ ist ein Vektorraum, der mit Z auch $\chi_{[\![0,t]\!]} Z$, ($t \in \mathbb{R}_+$) enthält. Wir statten $\mathcal{S}$ mit der sup-Norm aus, d.h. $\|Z\|_\infty = \sup \{|Z(t,\omega)|: \omega \in \Omega, t \in \mathbb{R}_+\}$.

Jedes $Z \in \mathcal{S}$ ist integrierbar bezüglich des von X erzeugten Prämaßes I_X, und der Integraloperator I_X erfüllt $I_X(Z) = \sum_i \beta_i (X_{T_i} - X_{S_i}) + \beta_0 \chi_F X_0$ für jedes $Z \in \mathcal{S}$ der oben angegebenen Form. Wir beachten, daß durch $Y_t := I_X(\chi_{[\![0,t]\!]} Z)$ ($t \in \mathbb{R}_+$) ein stochastischer Prozeß $Y = (Y_t)$ definiert ist.

Das weitere Vorgehen wird nun durch die bekannte Methode der Integrationstheorie bestimmt: Man versucht durch die Bildung von Limiten die Familie der Integranden zu erweitern. Dazu muß auf einem Unterraum $\mathcal{U}$ der prävisiblen Prozesse eine Topologie $\mathfrak{I}$ mit den folgenden Eigenschaften definiert werden:

i) $\mathcal{U}$ enthält $\mathcal{S}$ als dichten Teilraum und ist abgeschlossen gegen Multiplikation mit Prozessen der Form $\chi_{[\![0,t]\!]}$ ($t \in \mathbb{R}_+$).

ii) Der Integraloperator I_X ist stetig auf $\mathcal{S}$ bezüglich $\mathfrak{I}$.

Für Elemente $Z \in \mathcal{S}$ erhält man den mittels stochastischer Integration bezüglich X definierten Prozeß $Y = (Y_t)$ ohne den Umweg über $L_E^1(P)$. Dies gilt natürlich beim Übergang zu

Limiten nicht mehr ohne weiteres. Man muß also noch eine dritte Bedingung fordern:

iii) Die Fortsetzung des Integraloperators auf $\mathcal{U}$ werde auch mit I_X bezeichnet. Dann gibt es eine Vorschrift,die für jedes $Z \in \mathcal{U}$ der Abbildung $t \longrightarrow I_X(\chi_{[\![0,t]\!]} Z)$ genau eine Modifikation zuordnet.

Die Bedingung iii) wird üblicherweise dadurch erfüllt,daß man sich auf normale Prozesse beschränkt.

Es sei vielleicht noch der Grund dafür angeführt,warum das stochastische Integral auf dem oben beschriebenen Umwege definiert wird und nicht pfadweise,wie es für einfache Prozesse der Fall ist. Der Grund ist die wohlbekannte Tatsache,daß Martingale mit stetigen Pfaden fast sicher Pfade von nicht beschränkter Variation haben. Da jedoch das stochastische Integral hauptsächlich zur Integration bezüglich Martingalen (der Brownschen Bewegung!) entwickelt wurde,ist die pfadweise Definition des stochastischen Integrals nur in Ausnahmefällen möglich,wie zum Beispiel bei der Integration bezüglich Prozessen von integrabler Variation.

Ganz ohne Ersatz für die beschränkte Variation der Pfade läßt sich jedoch auch im oben diskutierten allgemeinen Fall nicht arbeiten: Um wenigstens den Abschluß von $\mathcal{S}$ bezüglich der sup-Norm als Integranden zu erhalten,muß man voraussetzen, daß das von X erzeugte Prämaß I_X von beschränkter Semivariation ist. Das impliziert,zumindest im Falle eines reellen Prozesses X, daß $i_X = EoI_X$ von beschränkter Variation ist, d.h. daß wegen Satz 2.2 X ein Quasimartingal ist. Man sieht also schon an dieser Stelle die Wichtigkeit der Quasimartingale als Hilfsmittel für die stochastische Integration ein, aber auch

die Bedeutung der Frage nach einer leicht nachprüfbaren Charakterisierung derjenigen Prozesse, die ein Prämaß I_X von beschränkter Semivariation erzeugen. Für reelle Prozesse X wurde in [7] eine derartige Charakterisierung durch eine überraschend einfache Bedingung angegeben. Eine Übersicht über die diesbezüglich für uns relevanten Ergebnisse findet sich im nächsten Paragraphen. Für den Fall von Prozessen mit Werten in einem Banachraum ist die oben angeschnittene Frage noch völlig ungelöst. Im letzteren Fall scheint es viel leichter zu sein, Beispiele für stochastische Prozesse zu finden, bezüglich deren kein befriedigendes stochastisches Integral definiert werden kann, als nichttriviale Beispiele für das Gegenteil. Diese Tatsache hat Yor [19] sogar zu der Behauptung verleitet, daß es nicht möglich sei, eine Theorie der stochastischen Integration für Prozesse mit Werten in einem Banachraum zu entwickeln. Für den Fall von Prozessen mit Werten in einem Hilbertraum wird in der vorliegenden Arbeit eine befriedigende Antwort auf die Frage nach dem Umfang der Klasse der stochastischen Prozesse vorgelegt werden, die Anlaß zu einem stochastischen Integral geben.

Zum Schluß dieses Abschnittes wollen wir uns noch der schon im Anschluß an die Definition angeschnittenen Frage zuwenden, wie man ohne die Voraussetzung der Normalität für ein Quasimartingal Q und für eine beliebige beschränkte Stoppzeit T die Zufallsvariable Q_T als ein Element von $L_E^1(P)$ definieren kann.

2.3 Satz: Es seien Q ein Quasimartingal und (T_n) eine antitone Folge von einfachen Stoppzeiten mit $\lim_n T_n = T$. Dann ist für jedes n die punktweise definierte Zufallsvariable Q_{T_n} ein Element von $L_E^1(P)$, und die Folge $(E(Q_{T_n} \mid \mathfrak{F}_T))$ ist eine Cauchyfolge in $L_E^1(P)$.

Beweis: Die punktweise definierte Zufallsvariable Q_{T_n} ist ein Element von $L^1_E(P)$ für jedes n, denn Q_{T_n} ist sogar $\mathfrak{F}_{T_n}$-meßbar. Weiterhin zeigt man wie im Beweis von Lemma 2.1 daß $\|E(Q_{T_{n+1}} - Q_{T_n} \mid \mathfrak{F}_{T_{n+1}})\|_1 \leq \mathrm{var}(i_Q,]\!]T_{n+1}, T_n]\!])$ für jedes n gilt. Daraus folgt die Ungleichung

$$\Sigma_n \|E(Q_{T_n} - Q_{T_{n+1}} \mid \mathfrak{F}_{T_{n+1}})\|_1 \leq \mathrm{var}(i_Q, \mathbb{R}_+ \times \Omega) \quad ,$$

und da die bedingte Erwartung eine Kontraktion auf $L^1_E(P)$ ist, ist die Summe $\Sigma_n \|E(Q_{T_n} - Q_{T_{n+1}} \mid \mathfrak{F}_T)\|_1$ absolut konvergent. Damit ist die Folge $(E(Q_{T_n} \mid \mathfrak{F}_T))$ eine Cauchyfolge in $L^1_E(P)$.

Seien nun Q ein Quasimartingal und (T_n) bzw. (S_n) antitone Folgen von einfachen Stoppzeiten mit $\lim_n T_n = \lim_n S_n = T$. Nach dem obigen Satz existieren die Limiten $u = \lim_n E(Q_{T_n} \mid \mathfrak{F}_T)$ und $v = \lim_n E(Q_{S_n} \mid \mathfrak{F}_T)$, und sie sind, wie wir sehen werden, gleich. Zunächst sei daran erinnert, daß jedes reelle Quasimartingal eine normale Modifikation besitzt (siehe z.Bsp. [14]). Es sei also für ein gegebenes Element x' des Dualraumes E' von E $Y = (Y_t)$ eine normale Modifikation des (reellen) Quasimartingals $x' \circ Q$. Wegen der rechtsseitigen Stetigkeit der Pfade gilt $\lim_n E(Y_{T_n} \mid \mathfrak{F}_T) = \lim_n E(Y_{S_n} \mid \mathfrak{F}_T) = Y_T$, wobei Y_T punktweise definiert ist. Wir haben also $x' \circ u = x' \circ v$ für alle $x' \in E'$, folglich gilt $u = v$.

2.4 Definition: Es seien ein Quasimartingal Q und eine Stoppzeit T gegeben. Für jede antitone Folge (T_n) von einfachen Stoppzeiten mit $\lim_n T_n = T$ konvergiert die Folge $(E(Q_{T_n} \mid \mathfrak{F}_T))$ gegen ein ($\mathfrak{F}_T$-meßbares) Element $Q_T \in L^1_E(P)$, und Q_T ist unabhängig von der speziellen Wahl der Folge (T_n). Eine Modifikation Q^T der Abbildung $t \longrightarrow Q_{T \wedge t}$ wird eine Modifikation des zur Zeit T gestoppten Quasimartingals Q genannt. Q^T ist natürlich nur bis auf eine Modifikation eindeutig bestimmt.

Bemerkung: Es sei noch einmal darauf hingewiesen,daß,wenn Q normal oder allgemeiner progressiv meßbar ist, Q_T und Q^T punktweise definiert werden,wie es am Anfang dieses Abschnittes ausgeführt wurde. Q^T ist also in diesem Fall eindeutig bestimmt. Für den Beweis der Existenz einer normalen Modifikation eines Quasimartingals Q im Paragraphen 3 wird jedoch der nicht notwendigerweise normale Prozeß Q auf die in 2.4 angegebene Weise gestoppt werden müssen. Darauf kann auch in [15] nicht verzichtet werden. In der erwähnten Arbeit wird nämlich beim Beweis von 4 , D-5 Théorème ein nicht normales Quasimartingal Q gestoppt, wobei Q_T punktweise definiert ist. Dies ist aus den schon am Anfang dieses Abschnittes angeführten Gründen nicht möglich.Vielleicht sollte bei dieser Gelegenheit vor weiteren Fehlern im Abschnitt 4 der obengenannten Arbeit gewarnt werden,in dem u.a. die Existenz von normalen Modifikationen für Prozesse mit Werten in einem Banachraum bewiesen wird. Die in [15] , 4 , A-3 Lemme definierte reelle Funktion σ' ist im allgemeinen nicht unabhängig von der gewählten Modifikation des Prozesses,wie man sich an Hand einfacher Beispiele überlegt. Zudem beruht der Beweis,daß σ' eine Stoppzeit ist,auf der Annahme,daß X_σ $\mathfrak{F}_\sigma$-meßbar ist,einer Annahme,die nicht gerechtfertigt ist.

Wir wollen nun noch zeigen,daß Modifikationen gestoppter Quasimartingale im Sinne von 2.4 wieder Quasimartingale sind.

2.5 Satz: Seien Q ein Quasimartingal und T eine beschränkte Stoppzeit. Dann ist jede Modifikation Q^T des zur Zeit T gestoppten Quasimartingals Q ein Quasimartingal.

Beweis: Wir schreiben X für Q^T , und wir müssen zeigen,daß X die Bedingungen (2) und (4) (siehe Definition des Quasimartingals) erfüllt. Daß (2) erfüllt ist,ist klar. Nach Satz 2.2

ist (4) äquivalent dazu,daß i_X von beschränkter Variation ist. Sei $T_1 \leq T_2 \leq \ldots \leq T_n$ eine Folge von einfachen Stoppzeiten. Dann gilt $\sum_i \|E(X_{T_{i+1}} - X_{T_i})\| = \sum_i \|E(Q_{T_{i+1} \wedge T} - Q_{T_i \wedge T})\|$. Zu jedem vorgegebenen $\varepsilon > 0$ existiert nach Satz 2.3 eine aufsteigende Folge (S_i) von einfachen Stoppzeiten,so daß $\|E(Q_{T_i \wedge T} - Q_{S_i})\| < \varepsilon/2n$ gilt für $i=1,\ldots,n$. Also haben wir

$$\sum_i \|E(X_{T_{i+1}} - X_{T_i})\| < \sum_i \|E(Q_{S_{i+1}} - Q_{S_i})\| + \varepsilon$$
$$\leq \mathrm{var}(i_Q, \mathbb{R}_+ \times \Omega) + \varepsilon$$

für jedes $\varepsilon > 0$, d.h. $\mathrm{var}(i_X, \mathbb{R}_+ \times \Omega) \leq \mathrm{var}(i_Q, \mathbb{R}_+ \times \Omega)$. Das war aber zu beweisen.

2.6 Satz: Sei Q ein Quasimartingal. Dann ist der durch $X(t,\omega) := \|Q(t,\omega)\|$ definierte reelle Prozeß X ein Quasimartingal.

Beweis: (Métivier und Pellaumail [12]) Es genügt wie im Beweis des vorhergehenden Satzes zu zeigen,daß die Variation von i_X beschränkt ist,d.h. daß eine Konstante k existiert,derart daß $\mathrm{var}(i_X,]\!]0,t]\!]) \leq k$ für alle $t \in \mathbb{R}_+$ gilt. Seien $u \leq v$ Elemente von $\mathbb{R}_+$. Dann gilt wegen der Positivität der bedingten Erwartung für P-fast alle $\omega \in \Omega$ die Ungleichung

$$X_u(\omega) = \|E(Q_v - Q_u \mid \mathcal{F}_u)(\omega) + E(Q_v \mid \mathcal{F}_u)(\omega)\|$$
$$\leq \|E(Q_v - Q_u \mid \mathcal{F}_u)(\omega)\| + E(X_v \mid \mathcal{F}_u)(\omega) \quad ,$$

d.h. es gilt $-E(\chi_F(X_v - X_u)) \leq \|E(Q_v - Q_u \mid \mathcal{F}_u)\|_1$ für alle $F \in \mathcal{F}_u$. Nun läßt sich jedes zu $[\![0]\!]$ disjunkte Element von $\mathcal{Q}_p$ als disjunkte Vereinigung von Mengen der Form $]\!]u,v] \times F$ $(F \in \mathcal{F}_u)$ schreiben. Da Q ein Quasimartingal ist,gibt es deshalb eine obere Schranke c für $-i_X(A)$ $(A \in \mathcal{Q}_p)$. Auf der anderen Seite gilt $i_X(]\!]0,t] \times \Omega) = E(\|Q_t\| - \|Q_0\|) \leq \mathrm{var}(i_Q, \mathbb{R}_+ \times \Omega)$ für alle $t \in \mathbb{R}_+$ und damit $\mathrm{var}(i_X,]\!]0,t] \times \Omega) \leq \mathrm{var}(i_Q, \mathbb{R}_+ \times \Omega) + 2c$.

§2 Zur Integrationstheorie reeller verallgemeinerter Martingale

In dem folgenden Paragraphen soll eine Übersicht über die Theorie des stochastischen Integrals im reellen Falle gegeben werden. Die Ergebnisse sind im Wesentlichen aus [7] entnommen,es wird deshalb weitgehend auf Beweise verzichtet werden können. Im ersten Abschnitt werden wir uns mit summierbaren Prozessen beschäftigen,d.h. mit reellen Prozessen X , derart daß das von X erzeugte Prämaß I_X von beschränkter Semivariation ist. Der zweite Abschnitt beschreibt die Funktion,die Prozesse von integrabler Variation in der Theorie des stochastischen Integrals haben. Hier werden auch die Struktursätze für reelle Quasimartingale in der Form zitiert,in der sie in dieser Arbeit benutzt werden. Im dritten Abschnitt werden wir die Besonderheiten des stochastischen Integrals bezüglich quadratisch integrierbaren Martingalen studieren. Hier wird auch schon stochastische Integration bezüglich vektorwertiger Prozesse betrachtet werden,nämlich stochastische Integration bezüglich Prozessen mit Werten im $\mathbb{R}^n$. Im vierten Abschnitt schließlich wird die Itô-Formel für $\mathbb{R}^n$-wertige Prozesse auf eine Form gebracht,die eine direkte Verallgemeinerung auf den Hilbertraum-wertigen Fall zuläßt.

1 Stochastische Integration bezüglich summierbarer Prozesse

1.1 Definition: Es sei X ein normaler,adaptierter (reeller) stochastischer Prozeß. X heißt summierbar , wenn das von X erzeugte Prämaß I_X von beschränkter Semivariation ist.

Die obige Definition eines summierbaren Prozesses weicht von der in [7] gegebenen insofern ab,als dort gefordert wird,daß I_X eine σ-additive Fortsetzung auf die σ-Algebra Σ_p hat. Im nächsten Satz wird jedoch gezeigt,daß diese Forderung äquivalent zur obigen schwächer scheinenden ist.

Zunächst wollen wir eine Beobachtung notieren,die im Falle reeller additiver Mengenfunktionen wohlbekannt ist.

1.2 Lemma: Es sei I eine auf einem Ring $\mathcal{R}$ definierte additive Mengenfunktion mit Werten in einem Banachrum B. Dann ist I von beschränkter Semivariation genau dann,wenn I beschränkt ist.

Beweis: Die Notwendigkeit der Bedingung ist klar. Daß die Begingung auch hinreichend ist,folgt aus der Kenntnis des reellen Falls und der Tatsache,daß schwach beschränkte Mengen in einem Banachraum normbeschränkt sind. In der Tat folgt aus der Beschränktheit von I, daß für jedes $x' \in B'$ die reelle Mengenfunktion $x' \circ I$ beschränkt und damit von beschränkter Semivariation ist. Also ist I von schwach beschränkter Semivariation und folglich von beschränkter Semivariation.

Der folgende Satz charakterisiert summierbare Prozesse:

1.3 Satz: Sei X ein normaler,adaptierter (reeller) stochastischer Prozeß. Die folgenden Aussagen sind äquivalent:

a) X ist summierbar

b) Das von X auf $\mathcal{R}_p$ erzeugte Prämaß I_X hat genau eine Fortsetzung zu einem σ-additiven Maß auf der σ-Algebra Σ_p.

c) $X = (X_t)$ ist ein Quasimartingal,derart daß $\sup_{t \in \mathbb{R}_+} |X_t|$ integrierbar (bezüglich P) ist.

d) Für jedes $f \in L^\infty(P)$ ist der Prozeß XF ein Quasimartingal, wobei $F = (F_t)$ die normale Modifikation des bis auf eine Modifikation gegebenen Martingals $t \longrightarrow E(f \mid \mathcal{F}_t)$ ist.

Bemerkung: Wir wollen hier auf die Unterschiede zum Charakterisierungssatz in [7] (Theorem 12.13) hinweisen. Die Behauptung b) im obigen Satz entspricht genau der Definition von Summierbarkeit in [7]. Weiterhin stimmen 1.3 c) und [7], 12.13 überein. Die

Behauptung d) im obigen Satz unterscheidet sich insofern von der Behauptung e) in [7], 12.13, als dort zusätzlich gefordert wird, daß das Quasimartingal XF von der Klasse (D) ist. Natürlich folgt 1.3 a) unmittelbar aus 1.3 b), da jedes auf einer σ-Algebra definierte σ-additive Maß beschränkt und damit von beschränkter Semivariation ist. Insgesamt kann man also sagen, daß die hier angegebene Verschärfung von [7], 12.13 in der Beobachtung besteht, daß die σ-Additivität des Prämaßes I_X eine Dreingabe der Beschränktheit von I_X ist.

Beweis: Für den Beweis der Äquivalenz von b) und c) verweisen wir auf [7]. Daß die Behauptung b) die Behauptung a) impliziert, ist nach den obigen Bemerkungen klar. Wir werden zunächst zeigen, daß a) äquivalent zu d) ist. Dazu bestimmen wir für ein $f \in L^\infty(P)$ die reelle Mengenfunktion foI_X. (Man beachte, daß hier f als Linearform auf $L^1(P)$ betrachtet wird, d.h. $f(g) = \int fg\, dP = E(fg)$ für $g \in L^1(P)$). Für zwei einfache endliche Stoppzeiten $S \leq T$ gilt die Gleichheit

$$\begin{aligned} foI_X(]\!]S,T]\!]) &= E(f(X_T - X_S)) \\ &= E(E(f \mid \mathfrak{F}_T)X_T - E(f \mid \mathfrak{F}_S)X_S \\ &= i_{XF}(]\!]S,T]\!]) \quad . \end{aligned}$$

Ebenso gilt $foI_X([\![0_F]\!]) = i_{XF}([\![0_F]\!])$ $(F \in \mathfrak{F}_0)$. Folglich stimmen die Mengenfunktion foI_X und das von XF erzeugte gemittelte Prämaß überein. Nun ist X summierbar genau dann, wenn I_X beschränkt ist oder äquivalenterweise, wenn I_X schwach beschränkt ist. Aus der Gleichheit $foI_X = i_{XF}$ folgt also, daß X summierbar ist genau dann, wenn i_{XF} beschränkt ist für jedes $f \in L^\infty(P)$ oder gemäß §1 Satz 2.2, wenn XF ein Quasimartingal für jedes $f \in L^\infty(P)$ ist. Wir müssen nun noch die Implikation a) $\Rightarrow$ c) beweisen. Es sei also X summierbar. Nach der eben bewiesenen Äquivalenz ist X ein Quasimartingal, das überdies normal ist. Nach [7], Theorem 9.15 existiert eine Zerlegung $X = M + V$ von X,

in der M ein lokales Martingal und V ein normaler Prozeß von integrabler Variation ist. Es ist klar,daß I_V beschränkt ist. Folglich ist auch I_M beschränkt. Weiterhin erfüllt V offensichtlich die Bedingung c) . Um zu zeigen,daß $\sup_{t\in\mathbb{R}_+}|X_t|$ integrierbar ist,genügt es also nachzuweisen,daß $\sup_{t\in\mathbb{R}_+}|M_t|$ integrierbar ist. Dazu setzen wir zunächst I_M auf einen etwas größeren Mengenring fort,nämlich auf den Ring $\bar{\mathcal{A}}_p$, der von den stochastischen Intervallen der Form $]\!]S,T]\!]$, wobei $S \leq T$ beschränkte Stoppzeiten sind,und $[\![0_F]\!]$ $(F \in \mathcal{F}_0)$ erzeugt wird.Wir bezeichnen die Fortsetzung wieder mit I_M und definieren sie durch $I_M([\![0_F]\!]) = \chi_F X_0$ und $I_M(]\!]S,T]\!]) = X_T - X_S$. (Man beachte, daß M ein normales Quasimartingal ist). Mit Hilfe von §1,Satz 2.3 sieht man,daß auch die oben definierte Fortsetzung I_M von beschränkter Semivariation ist. Sei nun (S_n) eine isotone Folge von Stoppzeiten,derart daß der zur Zeit S_n gestoppte Prozeß $M^{S_n} =: M^{(n)}$ für jedes n die Bedingung

$$M^{(n)*} =: \sup_{t\in\mathbb{R}_+}|M_t| \in L^1(P)$$

erfüllt. (Eine derartige Folge von Stoppzeiten existiert: Man setze $S_n'(\omega) =: \inf\{t: |M_t(\omega)| \leq n\}$. Da M normal ist,ist S_n' eine Stoppzeit,und es gilt $\lim_n S_n = \infty$. Da M ein lokales Martingal ist,existiert eine isotone Folge (S_n'') von Stoppzeiten mit $\lim_n S_n'' = \infty$, derart daß $M^{S_n''}$ ein gleichgradig integrierbares Martingal für jedes n ist. Die Folge (S_n) mit $S_n =: S_n' \wedge S_n'' \wedge n$ erfüllt die an (S_n) gestellte Forderung). Nach [7], 12.12 Corollary gilt die Ungleichung

$$\begin{aligned}\|M^{(n)*}\|_1 = \|\sup_{t\in\mathbb{R}_+}|M_t^{(n)}|\|_1 &\leq 40\ \mathrm{svar}(I_{M(n)},\mathbb{R}_+\times\Omega)\\ &= 40\ \mathrm{svar}(I_M,[\![0,S_n]\!])\\ &\leq 40\ \mathrm{svar}(I_M,\mathbb{R}_+\times\Omega)\end{aligned}$$

für jedes n ,d.h. die Folge $(M^{(n)*})$ ist eine isotone normbeschränkte Folge in $L^1(P)$. Damit ist aber auch

$$\sup_{t\in\mathbb{R}_+}|M_t| = \sup_n \sup_{t\in\mathbb{R}_+}|M_t^{(n)}| = \sup_n M^{(n)*}$$

ein Element von $L^1(P)$, und das war zu beweisen.

Mit Hilfe der Information des eben bewiesenen Satzes kann nun leicht das Programm ausgeführt werden, das im Abschnitt 2 des Paragraphen 1 skizziert wurde. Sei also X ein summierbarer Prozeß. Nach Satz 1.3 hat das von X auf $\mathcal{P}_p$ erzeugte Prämaß genau eine Fortsetzung zu einem σ-additiven Maß auf der σ-Algebra Σ_p der pävisiblen Mengen. Wir bezeichnen diese Fortsetzung wieder mit I_X ebenso wie den zugehörigen Integraloperator. I_X heißt <u>das von X erzeugte stochastische Maß</u>. Das Symbol $L^1(I_X)$ steht für den Raum (der Äquivalenzklassen) I_X-integrierbarer, prävisibler reeller Prozesse. Für jedes Element $Z \in L^1(I_X)$ definiert $m_Z(A) =: I_X(\chi_A Z)$ $(A \in \Sigma_p)$ ein $L^1(P)$-wertiges beschränktes Maß, und wir statten $L^1(I_X)$ mit der Norm $\|Z\| = \mathrm{svar}(m_Z, \mathbb{R}_+ \times \Omega)$ aus. Man prüft leicht nach, daß $L^1(I_X)$ mit dieser Norm ein Banachraum ist, in dem der Raum $\mathcal{S}$ der einfachen prävisiblen Prozesse dicht liegt (vergl. [7], Theorem 10.8).

Da m_Z für $Z \in L^1(I_X)$ beschränkt ist, definiert die Abbildung $t \longrightarrow I_X(\chi_{[\![0,t]\!]} Z)$ $(t \in \mathbb{R}_+)$ ein Quasimartingal nach Satz 1.2 . Dieses Quasimartingal hat eine normale Modifikation $Y = (Y_t)$. (Siehe z.Bsp. [7], Theorem 11.4). Wir beachten, daß diese Modifikation sogar ein summierbarer Prozeß ist. Damit ist auch die letzte Bedingung des Programms im Abschnitt 2 des ersten Pragraphen erfüllt, und wir können die folgende Definition notieren:

<u>1.4 Definition</u>: Sei X ein summierbarer stochastischer Prozeß, der das stochastische Maß I_X auf der σ-Algebra Σ_p der prävisiblen Mengen erzeugt. Zu jedem prävisiblen Prozeß $Z \in L^1(I_X)$ existiert eine normale Modifikation $Y = (Y_t)$ des durch $t \longrightarrow I_X(\chi_{[\![0,t]\!]} Z)$ bis auf eine Modifikation gegebenen Quasi-

martingals. Diese Modifikation ist überdies ein summierbarer Prozeß. Wir schreiben $\int Z\,dX = (\int_0^t Z_s\,dX_s)$ an Stelle von $Y = (Y_t)$ und bezeichnen den Prozeß $\int Z\,dX$ als das stochastische Integral von Z bezüglich X.

Wir wollen nun die Tatsache, daß das $L^1(P)$-wertige Maß I_X eindeutig bestimmt wird durch die Familie $\{foI_X: f \in L^1(P)' = L^\infty(P)\}$, dazu benutzen, um das stochastische Integral zu charakterisieren:

1.5 Satz: Sei X ein summierbarer (reeller) Prozeß, der das stochastische Maß I_X auf Σ_p erzeugt, und sei $Z \in L^1(I_X)$. Für Elemente $f \in L^\infty(P)$ bezeichne $F = (F_t)$ die normale Modifikation des durch $t \longrightarrow E(f \mid \mathfrak{F}_t)$ bis auf eine Modifikation gegebenen Martingals. Es gelten die folgenden Aussagen:

a) Für jedes $f \in L^\infty(P)$ sind die Produkte $FX = (F_t X_t)$ und $F(\int Z\,dX) = (F_t \int_0^t Z_s\,dX_s)$ Quasimartingale. Für die von FX bzw. $F(\int Z\,dX)$ erzeugten gemittelten Prämaße i_{XF} bzw. $i_{F(\int Z dX)}$ gilt: foI_X ist die eindeutige σ-additive Fortsetzung von i_{FX} auf Σ_p, und das durch $A \longrightarrow \int_A Z\,dfoI_X$ $(A \in \Sigma_p)$ gegebene Maß ist die eindeutige σ-additive Fortsetzung von $i_{F(\int Z\,dX)}$ auf Σ_p.

b) $\int Z\,dX$ ist das eindeutig bestimmte normale Quasimartingal, derart daß $foI_{\int Z\,dX}$ und das durch $A \longrightarrow \int_A Z\,dfoI_X$ $(A \in \Sigma_p)$ gegebene Maß übereinstimmen für alle $f \in L^\infty(P)$.

Bemerkung: Daß der Satz tatsächlich eine nützliche Charakterisierung des stochastischen Integrals darstellt, wird man im nächsten Abschnitt sehen, wo die hier angegebene Definition des stochastischen Integrals mit anderen in der Literatur vorkommenden Definitionen verglichen wird.

Beweis: b) Aus der Definition des stochastischen Integrals folgt direkt, daß $\int Z\,dX$ das normale Quasimartingal ist, für wel-

ches die Maße $I_{\int Z\,dX}$ und $A \longrightarrow I_X(\chi_A Z)$ $(A \in \Sigma_p)$ übereinstimmen. Also folgt b) ,sofern wir $E(f\, I_X(\chi_A Z)) = \int_A Z\, dfoI_X$ für alle $A \in \Sigma_p$ und $f \in L^\infty(P)$ zeigen. Diese Gleichheit ist offensichtlich,wenn Z ein prävisibler einfacher Prozeß $Z \in \mathcal{S}$ und A ein Element von $\mathcal{R}_p$ ist. Nun ist im allgemeinen Fall $Z \in L^1(I_X)$ und damit natürlich auch $\in L^1(foI_X)$. Wegen der σ-Additivität der beteiligten Maße gilt damit die obige Gleichheit allgemein.

a) Daß die beiden Produkte Quasimartingale sind,folgt aus Satz 1.3, da die Prozesse X und $\int Z\, dX$ sogar summierbar sind. Daß foI_X und i_{FX} auf $\mathcal{R}_p$ übereinstimmen haben wir bereits im Beweis von Satz 1.3 gesehen. Weiterhin wurde soeben bewiesen,daß die Maße $foI_{\int Z\,dX}$ und $A \longrightarrow \int_A Z\, dfoI_X$ $(A \in \Sigma_p)$ übereinstimmen. Daraus folgt die Übereinstimmung von $foI_{\int Z\,dX}$ mit $i_{F(\int Z\,dX)}$ auf $\mathcal{R}_p$ wie oben.

Korollar: Seien X und Z wie im Satz 2.5 . Wenn X ein Martingal ist,so ist auch $\int Z\, dX$ ein Martingal und,wenn X ein lokales Martingal ist,dann ist auch $\int Z\, dX$ ein lokales Martingal.

Beweis: Wir benutzen 1.5 a): Wenn X ein Martingal ist,dann ist i_X identisch gleich 0 . Damit ist $foI_X = 0$, wobei f dasjenige Element von $L^\infty(P)$ ist,welches identisch gleich 1 ist. Folglich ist $A \longrightarrow \int_A Z\, dfoI_X$ $(A \in \Sigma_p)$ und damit auch $i_{\int Z\,dX}$ das Nullmaß. Also ist $\int Z\, dX$ ein Martingal. Um den zweiten Teil der Behauptung zu beweisen,beobachtet man,daß X genau dann ein lokales Martingal ist,wenn eine isotone Folge (T_n) von beschränkten Stoppzeiten existiert mit $\lim_n T_n = \infty$, derart daß $[\![0,T_n]\!]$ eine i_X-Nullmenge für jedes n ist. Danach schließt man analog.

2 Der Projektionssatz und Prozesse integrabler Variation

Alle in diesem Abschnitt vorkommenden stochastischen Prozesse seien reell. Wir beginnen damit, den Projektionssatz für beschränkte meßbare Prozesse zu zitieren. Für einen Beweis sei auf [7], Theorem 7.15 oder auf [3], V, T14 verwiesen.

2.1 Satz: Wir bezeichnen mit $B^\infty(\Sigma)$ (bzw. $B^\infty(\Sigma_p)$, $B^\infty(\Sigma_w)$) die geordneten Vektorräume der beschränkten, meßbaren (bzw. prävisiblen, optionalen) stochastischen Prozesse. Dann existiert eine Projektion π von $B^\infty(\Sigma)$ auf $B^\infty(\Sigma_p)$ (bzw. auf $B^\infty(\Sigma_w)$), welche eindeutig durch die Gleichheit

$$E(X_T \chi_{\{T < \infty\}}) = E((\pi X)_T \chi_{\{T < \infty\}}) \qquad (X \in B^\infty(\Sigma))$$

für alle prävisiblen Stoppzeiten T (bzw. alle Stoppzeiten T) bestimmt ist. Diese Projektion hat die folgenden Eigenschaften:

(a) π ist positiv und linear

(b) π ist ordnungsfolgenstetig, d.h. für jede antitone Folge (X_n) von Elementen von $B^\infty(\Sigma)$, die punktweise gegen 0 konvergiert, konvergiert die Folge (πX_n) punktweise gegen 0.

(c) Es gilt $\pi[(\pi X)Y] = (\pi X)(\pi Y)$ für alle $X, Y \in B^\infty(\Sigma)$.

Bemerkung: Die Projektion auf $B^\infty(\Sigma_p)$ (bzw. $B^\infty(\Sigma_w)$) werde mit π_p (bzw. π_w) bezeichnet und heißt prävisible (bzw. optionale) Projektion. Für Prozesse der Form $X = f \chi_{]s,t] \times \Omega}$ ($s \leq t \in \mathbb{R}_+$, $f \in L^\infty(P)$) seien die beiden Projektionen explizit angegeben: Es gilt $\pi_p X = F_- \chi_{]s,t] \times \Omega}$, wobei F_- die linksseitig stetige Modifikation des bis auf eine Modifikation gegebenen Martingals $u \longrightarrow E(f \mid \mathfrak{F}_{u-})$ ist. $\pi_w X$ ist gegeben durch $\pi_w X = F \chi_{]s,t] \times \Omega}$, wobei F die rechtsseitig stetige Modifikation des bis auf eine Modifikation gegebenen Martingals $u \longrightarrow E(f \mid \mathfrak{F}_u)$ ist.

2.2 Die prävisible Projektion gestattet es,Maße,die auf Σ_p gegeben sind,auf die größere σ-Algebra Σ fortzusetzen. Wir erinnern uns der Verabredung,daß ein stochastischer Prozeß,dessen Pfade P-fast sicher identisch gleich 0 sind,mit dem Prozeß, der identisch gleich 0 ist,identifiziert wurde. Deshalb werden im Folgenden auch nur stochastische Maße betrachtet,d.h. auf einer σ-Unteralgebra von Σ definierte Maße μ, die die folgende Eigenschaft besitzen: Wenn der Prozeß χ_A $(A \in \Sigma)$ ununterscheidbar von 0 ist,so ist $\mu(A) = 0$. Wir bezeichnen mit $sca(\Sigma_p)$ bzw. $sca(\Sigma)$ die Räume der stochastischen Maße auf Σ_p bzw. Σ.

Es sei nun $\mu_o \in sca(\Sigma_p)$. Wir definieren das Maß $\mu \in sca(\Sigma)$ durch $\mu(A) = \int \pi_p \chi_A \, d\mu_o$ und bezeichnen μ als die prävisible Fortsetzung von μ_o. Falls andererseits ein Maß $\nu \in sca(\Sigma)$ gegeben ist,so bezeichne ν_o die Einschränkung von ν auf Σ_p und μ die prävisible Fortsetzung von ν_o. Es gilt $\mu = \pi_p' \nu_o$. Wegen dieser Eigenschaft wird μ die duale prävisible Projektion von ν genannt.

Zu gegebenem $\mu \in sca(\Sigma)$ definieren wir für jedes $t \in \mathbb{R}_+$ ein Maß μ^t durch $\mu^t(F) = (\llbracket 0,t \rrbracket \times F)$ $(F \in \mathcal{F})$. Da μ ein stochastisches Maß ist,ist μ^t P-absolut stetig. Wir schreiben W_t für die zugehörige Radon-Nikodym-Dichte $d\mu^t/dP$. $t \longrightarrow W_t$ definiert bis auf eine Modifikation einen stochastischen Prozeß,und es ist nicht besonders schwierig einzusehen,daß dieser Prozeß eine normale Modifikation W besitzt. Durch Zerlegen von μ in Positiv- und Negativteil sieht man,daß W sogar Pfade von beschränkter Variation hat. Sei andererseits ein normaler Prozeß $V = (V_t)$ mit Pfaden von beschränkter Variation gegeben. Wir bezeichnen mit $|V|_t$ die Totalvariation des Prozesses auf $[0,t]$ und nehmen an,daß der so entstandene stochastische Prozeß

$|V| = (|V|_t)$ die Bedingung $\sup_t E(|V|_t) < \infty$ erfüllt. Prozesse dieser Art wollen wir als roher Prozesse integrabler Variation bezeichnen. $V = (V_t)$ erzeugt ein stochastisches Maß μ_V auf Σ durch $\mu_V(A) = E(\int \chi_A(s,\omega)\, dV(s,\omega))$, wobei das Integral ein Stieltjes-Integral für jeden Pfad ω ist. Wenn wir nun wie oben den zu μ_V gehörigen Prozeß W_{μ_V} konstruieren, dann gilt $W_{\mu_V} = V$. (Für weitere Details und Beweise siehe [7], §2). Wir resümieren:

2.3 Satz: Ein roher Prozeß von integrabler Variation V erzeugt auf Σ ein stochastisches Maß $\mu_V \in sca(\Sigma)$, definiert durch

$$\mu_V(A) = E(\int \chi_A(s,\omega)\, dV(s,\omega))$$

für alle $A \in \Sigma$. Andererseits existiert zu jedem $\mu \in sca(\Sigma)$ genau ein roher Prozeß integrabler Variation V mit $\mu_V = \mu$.

Es sei daran erinnert, daß der Anlaß für die Betrachtungen in diesem Abschnitt unter anderem auch das Ziel war, den Charakterisierungssatz 1.5 für stochastische Integrale so umzuformulieren, daß die dort auftretenden Maße durch Prozesse integrabler Variation ersetzt werden. Nun sind diese Maße allenfalls auf Σ_p definiert. Es muß also die Klasse der Prozesse abgegrenzt werden, welche im Sinne von Satz 2.3 zur prävisiblen Fortsetzung eines $\mu \in sca(\Sigma_p)$ gehören.

2.4 Satz: Seien μ ein auf Σ_p definiertes (reelles) stochastisches Maß und $\bar{\mu}$ die prävisible Fortsetzung von μ. Dann ist der im Sinne von Satz 2.3 das Maß $\bar{\mu}$ erzeugende Prozeß V ein normaler prävisibler Prozeß integrabler Variation. Auf der andern Seite gilt für jeden derartigen Prozeß V die Gleichheit $\mu_V = \pi'_p \mu_V$.

Beweis: Siehe [7], Theorem 8.6.

Nun ist ein normaler prävisibler Prozeß integrabler Variation nach Satz 1.3 auch ein summierbarer Prozeß. Aus der leicht zu

verifizierenden Tatsache,daß das im Abschnitt 1 definierte stochastische Integral und der als Stieltjes-Integral über die Pfade von V definierte Prozeß übereinstimmen,folgt das

2.5 Lemma: Seien V ein normaler prävisibler Prozeß integrabler Variation und $Z \in L^1(I_V)$. Dann ist das stochastische Integral $\int Z\, dV$ ein normaler prävisibler Prozeß integrabler Variation, und mit den Bezeichnungen von Satz 2.3 gilt $\mu_{\int Z\, dV} = Z \cdot \mu_V$. Insbesondere ist $L^1(I_V)$ der Raum aller μ_V-integrierbaren,prävisiblen Prozesse.

Um das angestrebte Ziel zu erreichen,zitieren wir noch den Doob-Meyerschen Zerlegungssatz für Quasimartingale.

2.6 Definition: Ein normales (reelles) Quasimartingal Q heißt von der Klasse (D), wenn die Menge $\{Q_T: T \text{ endliche Stoppzeit}\}$ gleichgradig integrierbar in $L^1(P)$ ist. Ist Q ein Quasimartingal mit Werten in einem Banachraum E , so heißt Q von der Klasse (D) , wenn für jedes $x' \in E'$ die normale Modifikation des reellen Quasimartingals $x' \circ Q$ von der Klasse (D) ist.

Mit den Bezeichnungen von Satz 2.3 gilt:

2.7 Satz: Sei Q ein normales (reelles) Quasimartingal der Klasse (D) . Dann hat Q eine eindeutige Zerlegung $Q = M + V$, wobei M ein gleichgradig integrierbares Martingal mit $M_0 = 0$ und V ein normaler prävisibler Prozeß integrabler Variation ist. Dabei ist μ_V , eingeschränkt auf Σ_p , gerade die σ-additive Fortsetzung des von Q erzeugten gemittelten Prämaßes i_Q.

Beweis: Siehe [7], 9.13 Corollary 2 .

Mit diesen Hilfsmitteln läßt sich nun der Charakterisierungssatz beweisen.

2.8 Definition: Es sei das Produkt XY zweier normaler stochas-

tischer Prozesse X und Y ein Quasimartingal der Klasse (D). Nach Satz 2.8 existiert ein eindeutiger, normaler prävisibler Prozeß $V = (V_t)$, derart daß $XY - V$ ein Martingal ist, das gleich 0 ist zur Zeit $t=0$. Dieser zu XY gehörige Prozeß $V = (V_t)$ wird mit $\langle X,Y\rangle = (\langle X,Y\rangle_t)$ bezeichnet. Man beachte, daß für den Fall, daß $X = Y$ ein Martingal ist, $\langle X,X\rangle$ gerade die prävisible quadratische Variation von X ist.

2.9 Satz: Es seien X ein summierbarer (reeller) Prozeß und $F = (F_t)$ ein normales (reelles) Martingal, welches beschränkt ist in dem Sinne, daß $\sup_t |F_t| \leq c$ für eine Konstante $c \geq 0$ erfüllt ist. Dann ist XF ein Quasimartingal der Klasse (D), und es gilt: Für jeden prävisiblen Prozeß $Z \in L^1(I_X)$ ist das stochastische Integral $\int Z\, dX$ dasjenige eindeutig bestimmte normale Quasimartingal Q, welches eine und damit jede der folgenden beiden äquivalenten Bedingungen erfüllt:

(i) Es gilt $\langle Q,F\rangle_t = \int_0^t Z_s\, d\langle X,F\rangle_s$ für alle $t \in \mathbb{R}_+$ und alle beschränkte, normale Martingale $F = (F_t)$.

(ii) Es gilt $E(Q_t F_t) = E\left(\int_0^t Z_s\, d\langle X,F\rangle_s\right)$ für alle $t \in \mathbb{R}_+$ und alle beschränkte, normale Martingale $F = (F_t)$.

Bemerkung: Der Satz stellt das Verbindungsglied dar zwischen dem in diesem Paragraphen definierten stochastischen Integral und dem stochastischen Integral in Theorien, die vektorwertige Maße nicht benutzen. Das stochastische Integral wird in diesen Theorien nämlich mit Hilfe der Bedingungen (i) oder (ii) definiert. So ist zum Beispiel die in [4] für quadratisch integrierbare Martingale angegebene Bedingung identisch mit (i), die in [13] angegebene mit (ii). Daß die in [13], (Chap.V,II,(16.2)) für $\underline{H}^1$-Martingale gegebene Bedingung und (i) äquivalent sind, folgert man aus den nachstehenden Tatsachen:

a) Ein Martingal X ist ein Element von $\underset{=}{H}^1$ genau dann,wenn X summierbar ist.(Siehe [7] ,Proposition 12.12)

b) Z ist ein Element von $L^1(I_X)$ genau dann,wenn $(\int_0^\infty Z_s^2 \, d[X,X]_s)^{1/2}$ P-integrierbar ist.(Siehe [13],ChapV,II,16b).

c) $[X,F] - \langle X,F\rangle$ ist ein Martingal für jedes beschränkte,normale Martingal F . Folglich ist $\langle X,F\rangle$ die duale prävisible Projektion von $[X,F]$.

(Zur Definition des Prozesses $[X,F] = ([X,F]_t)$ siehe [13], Chap.IV, 9).

Beweis des Satzes: Daß XF ein Quasimartingal ist,folgt sofort aus Satz 1.3 c) und d) . Nach Satz 2.3 und Lemma 2.5 ist (i) äquivalent zu $\mu_{\langle Q,F\rangle} = Z \, d\mu_{\langle X,F\rangle}$. Satz 2.7 liefert die Gleichungen $\mu_{\langle Q,F\rangle}(A) = i_{QF}(A)$ und $\mu_{\langle X,F\rangle}(A) = i_{XF}(A)$ für $A \in \mathcal{R}_p$. Mit Hilfe von Satz 1.5 sehen wir also,daß auf $\mathcal{R}_p$ die Maße $\mu_{\langle X,F\rangle}$ und $F_\infty \circ I_X$ bzw. $\mu_{\langle Q,F\rangle}$ und $F_\infty \circ I_Q$ übereinstimmen.Also ist (i) äquivalent zu der in Satz 1.5 b) angegebenen Bedingung, und folglich gilt $Q = \int Z \, dX$ genau dann,wenn Q die Bedingung (i) erfüllt. Daß (i) (ii) impliziert,folgt aus der mit Hilfe von Satz 2.7 einzusehenden Gleichheit

$$E(Q_t F_t) = i_{QF}([0,t] \times \Omega) = \mu_{\langle Q,F\rangle}([0,t] \times \Omega) = E(\int_0^t Z_s \, d\langle X,F\rangle_s).$$

Zum Schluß beweisen wir noch,daß (ii) die Bedingung (i) impliziert. Wir müssen zeigen,daß $\mu_{\langle Q,F\rangle} = Z \, d\mu_{\langle X,F\rangle}$ gilt. Da $\langle Q,F\rangle$, Z und $\langle X,F\rangle$ prävisibel sind,genügt es zu zeigen,daß die Einschränkungen dieser Maße auf $\mathcal{R}_p$ übereinstimmen.(Siehe Satz 2.4). Da offensichtlich aus (ii) die Gleichheit $Q_0 = Z_0 X_0$ folgt, bleibt nur noch die Gleichheit

$$\mu_{\langle Q,F\rangle}(]s,t] \times H) = \int \chi_{]s,t] \times H} \, Z \, d\mu_{\langle X,F\rangle}$$

für alle $s \leq t \in \mathbb{R}_+$ und $H \in \mathcal{F}_s$ zu zeigen. Wir definieren das Martingal $G = (G_u)$ als die normale Modifikation des bis auf

eine Modifikation gegebenen Martingals $u \longrightarrow E(\chi_H F_\infty \mid \mathfrak{F}_u)$. G ist offensichtlich ein beschränktes Martingal,und wegen $H \in \mathfrak{F}_s$ haben wir für $u \geqslant v \geqslant s$ die Gleichheit

$$\begin{aligned} E(X_u G_u - \chi_H \langle X,F\rangle_u \mid \mathfrak{F}_v) &= \chi_H\, E(X_u F_u - \langle X,F\rangle_u \mid \mathfrak{F}_v) \\ &= \chi_H\, (X_v F_v - \langle X,F\rangle_v) \\ &= X_v G_v - \chi_H \langle X,F\rangle_v \quad . \end{aligned}$$

Wegen der Eindeutigkeit der Doob-Meyer Zerlegung stimmen also für $u \geqslant s$ die Prozesse $\langle X,G\rangle$ und $\chi_H\langle X,F\rangle$ überein. Damit gilt

$$\begin{aligned} \mu_{\langle Q,F\rangle}(]s,t] \times H) &= E(Q_t G_t - Q_s G_s) \\ &= E(\int_s^t Z_u \, d\langle X,G\rangle_u) \\ &= E(\int_0^\infty \chi_{]s,t]\times H}\, Z_u \, d\langle X,F\rangle_u) \\ &= \int \chi_{]s,t]\times H}\, Z \, d\mu_{\langle X,F\rangle} \quad . \end{aligned}$$

Das war aber zu beweisen.

3.Das stochastische Integral bezüglich quadratisch integrierbarer Martingale: Die stochastische Integration hat ihre Wurzeln im stochastischen Integral bezüglich eines quadratisch integrierbaren Martingals oder,genauer gesagt,bezüglich eines Wiener-Prozesses. Es ist klar,daß die im Abschnitt 1 dieses Paragraphen entwickelte Integrationstheorie das Integral bezüglich quadratisch integrierbarer Martingale umfaßt.(Man benutze die Doobsche Maximalungleichung und Satz 1.3 c)). Dennoch wollen wir hier einige Eigenschaften notieren,die diesen Spezialfall vor dem allgemeinen auszeichnen

3.1 Definition: Es sei E ein Banachraum. Ein E-wertiges Martingal $M = (M_t)$ heißt quadratisch integrierbar , wenn für jedes $t \in \mathbb{R}_+$ M_t ein Element von $L^2_E(P)$ ist und $\sup_{t\in\mathbb{R}_+} \|M_t\|_2 < \infty$ gilt. ($\|M_t\|_2$ ist die $L^2_E(P)$-Norm von M_t)

3.2 Satz: Es seien M ein normales, quadratisch integrierbares reelles Martingal mit $M_\infty =: \lim_{t\to\infty} M_t$ und I_M das von M auf $\mathcal{Q}_p$ erzeugte Prämaß. I_M werde als Mengenfunktion mit Werten in $L^2(P)$ betrachtet. Es gelten die folgenden Behauptungen:

(a) I_M hat genau eine σ-additive Fortsetzung zu einem Maß auf Σ_p mit Werten in $L^2(P)$. Diese Fortsetzung und der zugehörige Integraloperator werden beide mit I_M bezeichnet.

(b) Die Semivariation des Maßes I_M ist gegeben durch

$$\operatorname{svar}(I_M, A) = E(M_\infty I_M(A))^{1/2} = E\left(\int_0^\infty \chi_A \, d\langle M,M\rangle_s\right)^{1/2}$$

für alle $A \in \Sigma_p$. Insbesondere gilt

$$\|M_\infty\|_2 = \operatorname{svar}(I_M, \mathbb{R}_+ \times \Omega) = E(\langle M,M\rangle_\infty)^{1/2}.$$

(c) Der Raum $L^1(I_M)$ kann mit dem Hilbertraum $L^2(M_\infty \circ I_M)$ identifiziert werden. Insbesondere ist ein prävisibler Prozeß Z genau dann I_M-integrierbar, wenn

$$E\left(\int_0^\infty Z_s^2 \, d\langle M,M\rangle_s\right) < \infty \text{ gilt.}$$

(d) Der Integraloperator $I_M: L^1(I_M) \longrightarrow L^2(P)$ ist eine Isometrie des Hilbertraumes $L^1(I_M) = L^2(M_\infty \circ I_M)$ in $L^2(P)$.

Beweis: Siehe [7], Theorem 11.6.

Bemerkungen: $M_\infty \circ I_M$ ist so zu verstehen, daß M_∞ als Linearform auf $L^2(P)$ aufgefaßt wird, d.h. $M_\infty \circ I_M(A) = E(M_\infty I_M(A))$ $(A \in \Sigma_p)$. Da I_M im obigen Satz als $L^2(P)$-wertiges Maß betrachtet wird, ist $L^1(I_M)$ nicht identisch mit dem im Abschnitt 1 definierten $L^1(I_M)$, bei dem I_M als $L^1(P)$-wertiges Maß betrachtet wurde. Die Norm auf $L^1(I_M)$ ist auch hier wieder definiert durch

$$\|Z\| = \operatorname{svar}(Z \, dI_X, \mathbb{R}_+ \times \Omega)$$

$$= \sup\left\{\left\|\int YZ \, dI_M\right\|_2 : Y \in B^\infty(\Sigma_p),\ |Y| \le 1\right\}.$$

Das folgende Korollar enthält eine äquivalente Formulierung der klassischen Definition des stochastischen Integrals für quadratisch integrierbare Martingale. Es folgt mit Hilfe von Satz

2.9 aus dem vorhergehenden Satz.

Korollar: Seien M ein quadratisch integrierbares normales Martingal und Z ein prävisibler Prozeß mit $E(\int_0^\infty Z_s^2 \, d\langle M,F\rangle_s) < \infty$. Dann ist $\int Z \, dM$ dasjenige normale Martingal $N = (N_t)$, welches

$$E(N_\infty F_\infty) = E(\int_0^\infty Z_s \, d\langle M,F\rangle_s)$$

erfüllt für alle quadratisch integrierbare, normale Martingale F.

Es sei nun $M = (M_t)$ ein normales, quadratisch integrierbares reelles Martingal. M ist die normale Modifikation von $t \longrightarrow E(M_\infty \mid \mathfrak{F}_t)$. Nach Satz 3.2 ist $\{\int Z \, dM : Z \in L^1(I_M)\}$ in diesem Sinne ein abgeschlossener Unterraum von $L^2(P)$, nämlich der Unterraum $\mathcal{U} := \{I_M(Z): Z \in L^1(I_M)\}$. Aus der Definition des stochastischen Integrals folgt, daß $\mathcal{U}$ der kleinste abgeschlossene Unterraum von $L^2(P)$ ist, der für jede beschränkte Stoppzeit T das Element $M_T = E(M_\infty \mid \mathfrak{F}_T)$ enthält. Unterräume $\mathcal{U}$ von $L^2(P)$ mit der Eigenschaft, daß aus $f \in \mathcal{U}$ folgt $E(f \mid \mathfrak{F}_T) \in \mathcal{U}$ für jede beschränkte Stoppzeit T, werden als bezüglich optionalen Stoppens stabile Unterräume bezeichnet. Wenn wir nun einen bezüglich optionalen Stoppens stabilen Unterraum $\mathcal{U}$ wieder als einen Raum normaler, quadratisch integrierbarer Martingale betrachten, so läßt sich das orthogonale Komplement $\mathcal{U}^\perp$ durch die folgende Bedingung charakterisieren: Ein Martingal N ist ein Element von $\mathcal{U}^\perp$ genau dann, wenn $\langle N,M\rangle = 0$ gilt für alle Martingale $M \in \mathcal{U}$. Insbesondere sieht man daraus, daß auch $\mathcal{U}^\perp$ stabil bezüglich optionalen Stoppens ist. (Siehe [7], §11).

3.3 Satz: Es sei $L^2(P)$ wie oben mit dem Raum der normalen, quadratisch integrierbaren reellen Martingale identifiziert. Es gelten die folgenden Behauptungen:

(a) Der Raum $\mathcal{M}_c^2$ der quadratisch integrierbaren Martingale $M = (M_t)$ mit stetigen Pfaden und $M_0 = 0$ ist ein bezüg-

lich optionalen Stoppens stabiler Unterraum von $L^2(P)$.

(b) Der Raum $\mathcal{M}_d^2 := \mathcal{M}_c^{2\perp}$ der rein nicht stetigen Martingale ist stabil bezüglich optionalen Stoppens, und es gilt $M \in \mathcal{M}_d^2$ genau dann, wenn $\langle M,N\rangle = 0$ gilt für alle $N \in \mathcal{M}_c^2$.

(c) Jedes normale, quadratisch integrierbare Martingal M hat genau eine Zerlegung $M = M^c + M^d$ in einen stetigen Anteil $M^c \in \mathcal{M}_c^2$ und einen rein nicht stetigen Anteil $M^d \in \mathcal{M}_d^2$.

Beweis: Wir verweisen auf [7], §11, 11.7ff oder [13], Chap II, 1ff.

Bemerkungen: 1) Man kann die Form des rein nicht stetigen Anteils M^d in obiger Zerlegung leicht angeben: Sei (T_n) eine Folge von Stoppzeiten mit P-fast sicher disjunkten Graphen, die die Sprünge von M ausschöpft. Wir setzen $M^{(n)} := \Delta M_{T_n} \chi_{[\![T_n,\infty[\![} - V^{(n)}$, wobei $\Delta M_{T_n} = M_{T_n} - M_{T_n-}$ und $V^{(n)}$ die duale prävisible Projektion von $M_{T_n} \chi_{[\![T_n,\infty[\![}$ ist. Dann ist M^d die orthogonale Summe $M^d = \Sigma_n M^{(n)}$.

2) Wenn M ein normales, quadratisch integrierbares Martingal ist und gleichzeitig ein Prozeß von integrabler Variation, so ist M ein Element von $\mathcal{M}_d^2$. Man sieht das mit Hilfe der für jede Stoppzeit T und für jedes quadratisch integrierbare Martingal $N = (N_t)$ gültigen Gleichheit $E(M_T N_T) = E(\Sigma_{s \leq T} \Delta M_s \Delta N_s)$. (Siehe [7], 8.10 Corollary)

4 Die Itô-Formel im endlichdimensionalen Fall: In diesem Abschnitt wollen wir die Itô-Formel für Semimartingale mit Werten im $\mathbb{R}^n$ so umformulieren, daß sie sich durch Approximation direkt auf den Hilbertraum-wertigen Fall verallgemeinern läßt. Diese Umformulierung besteht im wesentlichen darin, daß die Formel, die üblicherweise komponentenweise geschrieben wird, in eine geschlossene Form gebracht wird.

Wir definieren einige Klassen von Prozessen,die wir im Folgenden benützen werden,unmittelbar für Banachraum-wertige Prozesse.Dieses Vorgehen hat eine kleine Abschweifung in das Gebiet der Banachraum-wertigen Prozesse zur Folge.

4.1 Definition: Es sei X ein normaler,adaptierter stochastischer Prozeß mit Werten in einem Banachraum E. X heißt ein Prozeß von beschränkter Variation, wenn eine isotone Folge (T_n) von Stoppzeiten mit $\lim_n T_n = \infty$ existiert,derart daß der Prozeß $\chi_{[\![0,T_n[\![}X$ ein Prozeß von integrabler Variation für jedes n ist. X heißt ein Semimartingal, wenn X die Summe $X = M + V$ eines lokalen Martingals M und eines Prozesses von beschränkter Variation V ist.

Üblicherweise wird ein Prozeß X von beschränkter Variation der Intuition folgend dadurch definiert,daß X auf jedem Intervall $[0,t]$ Pfade von beschränkter Variation besitzt.Die hier angegebene Definition hat jedoch für den vektorwertigen Fall einige Vorteile.Das folgende Lemma zeigt,daß der Unterschied zwischen beiden Definitionen ohnehin gegenstandslos ist,wenn X Werte in einem separablen Teilraum von E annimmt.Insbesondere stimmt also obige Definition mit der klassischen Definition für den Fall $E = \mathbb{R}$ überein.

4.2 Lemma: Es sei X ein normaler adaptierter Prozeß mit Werten in einem Banachraum E. X ist von beschränkter Variation genau dann,wenn X fast sicher Werte in einem separablen Teilraum von E annimmt und für alle $t \in \mathbb{R}_+$ Pfade von beschränkter Variation auf dem Intervall $[0,t]$ hat.

Beweis: Es seien X ein Prozeß von beschränkter Variation und (T_n) wie in Definition 4.1. Daß X fast sicher Werte in einem separablen Teilraum von E annimmt,ist leicht einzusehen. Wir

müssen nur zeigen,daß für jedes n der Prozeß $V^{(n)} = \chi_{[\![0,T_n[\![} V$ diese Eigenschaft hat.Nun gilt aber $V_t^{(n)} \in L_E^1(P)$ für jedes $t \in \mathbb{R}_+$, folglich ist die Menge $\{V^{(n)}(s,\omega): s \in \phi_+, \omega \in \Omega \setminus N\}$ in einem separablen Teilraum von E enthalten,wobei ϕ_+ die Menge der positiven rationalen Zahlen und N eine P-Nullmenge ist. Wegen $V^{(n)}(t,\omega) = \lim_{s \downarrow t, s \in \phi_+} V^{(n)}(s,\omega)$ für alle $\omega \in \Omega$ hat damit $V^{(n)}$ P-fast sicher Werte in einem separablen Unterraum von E . Für das weitere können wir also annehmen,daß E separabel ist. Sei nun $\omega \in \Omega$. Wir bezeichnen mit $|X|(t,\omega)$ die Variation des Pfades ω im Intervall $[0,t]$ und mit $|X|$ den dadurch definierten stochastischen Prozeß. Es gilt offensichtlich (1) $p(X_t - X_s) \leq |X|_t - |X|_s$ für $t \geq s \in \mathbb{R}_+$, wobei p die Norm von E ist. Da E separabel ist,existiert eine Folge (x_n') von Elementen der Einheitskugel von E' , derart daß $\sup_n \langle x, x_n' \rangle = p(x)$ für alle $x \in E$ gilt.Es ist klar,daß $t \longrightarrow |X|(t,\omega)$ die kleinste monoton wachsende wachsende Funktion ist,derart daß $t \longrightarrow |X|(t,\omega) - |x_n' \circ X|(t,\omega)$ positiv und monoton wachsend ist für jedes n und $\omega \in \Omega$. X ist also das Supremum einer geeigneten Folge von adaptierten Prozessen und folglich ein normaler adaptierter Prozeß mit positiven isotonen Pfaden. Für jedes m ist also die für alle $\omega \in \Omega$ durch $T_m(\omega) = \inf\{t \in \mathbb{R}_+: |X|(t,\omega) \geq m\}$ definierte Abbildung eine Stoppzeit,und es gilt $\lim_{t \to \infty} T_m = \infty$, da $|X|$ normal ist.Für jedes m ist aber $X^{(m)} = \chi_{[\![0,T_m[\![} X$ ein Prozeß von integrabler Variation. Nach (1) gilt nämlich für jede isotone Folge $t_1, \ldots, t_k$ von Elementen von $\mathbb{R}_+$ die Ungleichung $\sum_i p(X_{t_{i+1}}^{(m)} - X_{t_i}^{(m)}) \leq m$ und damit $\sum_i \| X_{t_{i+1}}^{(m)} - X_{t_i}^{(m)} \|_1 \leq m$. Folglich ist gezeigt,daß die Bedingung hinreichend ist. Es sei nun andererseits eine Folge (T_m) von Stoppzeiten wie in der Definition 4.1 gegeben. $V = \chi_{[\![0,T_m[\![} X$ ist ein Prozeß von integrabler Variation. Wir

müssen zeigen,daß V fast sicher Pfade von beschränkter Variation besitzt. Nach den vorausgegangenen Überlegungen genügt es zu zeigen,daß ein reeller normaler Prozeß W mit positiven isotonen Pfaden existiert,derart daß für alle n $W - |x_n' \circ V|$ fast sicher positive isotone Pfade besitzt.Wir betrachten die Prozesse $|x_n' \circ V|$ als Elemente des Banachverbandes SV der rohen Prozesse integrabler Variation (siehe [7],§2). Da V ein Prozeß von integrabler Variation ist,existiert eine Konstante c , derart daß die SV-Norm $\|W^{(n)}\|$ des Prozesses $W^{(n)} := |x_1' \circ V| \vee \ldots \vee |x_n' \circ V|$ für alle n kleiner als c ist.Folglich ist $(W^{(n)})$ eine isotone beschränkte Folge in SV . Nun ist SV isometrisch isomorph als Banachverband zu $sca(\Sigma)$, (siehe [7],Theorem 2.6) , also ein AL-Raum. Folglich existiert das Supremum $W = \sup_n W^{(n)}$ in SV. Da $W - |x_n' \circ V|$ für alle n positive isotone Pfade besitzt,ist das Lemma bewiesen.

Wir bereiten die Definition des lokalen stochastischen Integrals vor durch den folgenden

4.3 Satz: Es seien X und Y zwei summierbare reelle Prozesse und $Z \in L^1(I_X) \wedge L^1(I_Y)$. Mit den Prozessen X und Y stimmen auch die stochastischen Integrale $\int Z\, dX$ und $\int Z\, dY$ auf dem stochastischen Intervall $[\![0,T[\![$ überein.

Beweis: Wir können annehmen,daß X und Y zur Zeit T gestoppt sind.Dann ist $V = X - Y = (X_T - Y_T)\chi_{[\![T,\infty[\![}$ ein summierbarer Prozeß, und wegen $I_V = I_X - I_Y$ gilt $Z \in L^1(I_V)$. Als stochastisches Integral erhalten wir $\int Z\, dV = (X_T - Y_T)Z_T \chi_{[\![T,\infty[\![}$, folglich verschwindet $\int Z\, dX - \int Z\, dY = \int Z\, dV$ auf dem Intervall $[\![0,T[\![$.

4.4 Definition: Es seien Z ein reeller prävisibler Prozeß und X ein normaler,adaptierter reeller Prozeß. Z heißt lokal integrierbar bezüglich X , wenn eine isotone Folge (T_n) von

Stoppzeiten mit den folgenden Eigenschaften existiert:

(a) $\lim_n T_n = \infty$

(b) $X^{(n)} := \chi_{[\![0,T_n[\![} X$ ist summierbar für jedes n .

(c) Z ist ein Element von $L^1(I_{X^{(n)}})$ für jedes n .

Für jedes n ist das stochastische Integral $\int Z\, dX^{(n)}$ wohldefiniert,und für $m \geq n$ stimmen $\int Z\, dX^{(m)}$ und $\int Z\, dX^{(n)}$ nach Satz 4.3 auf $[\![0,T_n[\![$ überein. Das Integral $\int Z\, dX$ kann somit als der Prozeß definiert werden,welcher auf $[\![0,T_n[\![$ mit $\int Z\, dX^{(n)}$ für jedes n übereinstimmt. Daß dadurch $\int Z\, dX$ unabhängig von der Folge (T_n) definiert ist,ist wieder eine Konsequenz aus dem Satz 4.3 .

4.5 Definition: Sei Z ein prävisibler Prozeß mit Werten in ein einem Banachraum E mit der Norm p . Z heißt lokal beschränkt, wenn eine isotone Folge (T_n) von Stoppzeiten existert,mit den folgenden Eigenschaften:

(a) $\lim_n T_n = \infty$

(b) Der reelle Prozeß $p \circ X^{T_n}$ ist durch eine Konstante c beschränkt,gleichmäßig in $(t,\omega) \in \mathbb{R}_+ \times \Omega$.

4.6Satz:Es seien X ein reelles Semimartingal und Z ein lokal beschränkter,prävisibler reeller Prozeß. Dann ist Z lokal integrierbar bezüglich X .

Zum Beweis benötigen wir das folgende

4.7 Lemma: Sei Q ein normales reelles Quasimartingal,das betragsmäßig durch eine Konstante c beschränkt ist.Dann besitzt Q eine Zerlegung $Q = M + V$, wobei M ein quadratisch integrierbares Martingal und V ein normaler,prävisibler Prozeß von integrabler Variation ist.

Beweis: Siehe [7], Proposition 12.1

Beweis des Satzes 4.6: X ist die Summe $X = M + V$ eines lokalen Martingals M und eines Prozesses V von beschränkter Variation. Es seien (S_n) bzw. (S_n') bzw. (S_n'') isotone Folgen von Stoppzeiten mit unendlichem Supremum, derart daß M^{S_n} ein Martingal, $\chi_{[\![0,S_n'[\![}V$ ein Prozeß von integrabler Variation und $Z^{S_n'}$ ein durch eine Konstante betragsmäßig beschränkter Prozeß ist für jedes n. Definiere die Folge (T_n') von Stoppzeiten durch $T_n'(\omega) = \inf\{t \geq 0: |M^{S_n}(t,\omega)| \geq n\}$ für alle $\omega \in \Omega$, und setze $T_n = S_n \wedge S_n' \wedge S_n'' \wedge T_n'$. Es ist klar, daß $V^{(n)} := \chi_{[\![0,T_n[\![}V$ ein Prozeß von integrabler Variation und folglich summierbar ist. Weiterhin ist Z ein Element von $L^1(I_{V^{(n)}})$, da Z^{T_n} beschränkt ist. Wenn wir also zeigen, daß M^{T_n} summierbar ist für alle n, ist der Satz bewiesen. Wir schreiben $M^{T_n} = Q + W$ mit $W = M_{T_n}\chi_{[\![T_n,\infty[\![}$. W ist ein Prozeß von integrabler Variation. Da M^{T_n} ein Martingal ist, ist folglich Q ein Quasimartingal. Darüberhinaus ist Q betragsmäßig durch n beschränkt, gestattet also eine Zerlegung $Q = N + U$ wie in Lemma 4.7. N ist ein quadratisch integrierbares Martingal und U ein Prozeß von integrabler Variation. Also ist $M^{T_n} = N + W + U$ nach Satz 3.2 summierbar.

Bemerkung: Man hätte im letzten Teil des Beweises auf Lemma 4.7 verzichten können, wenn man die Ergebnisse des Abschnittes 1 dieses Paragraphen verwendet hätte, denn M^{T_n} erfüllt offensichtlich 1.3c). Der umständlichere Beweis wurde deshalb ausgeführt, weil im Falle Hilbertraum-wertiger Semimartingale ein analoges Vorgehen zum Ziel führen wird.

Um die Itô-Formel formulieren zu können, sind noch einige Vorbereitungen notwendig.

4.8 Satz: Es sei X ein reelles Semimartingal. Dann besitzt X eine Zerlegung $X = X^c + X^d$ in ein lokales Martingal X^c mit stetigen Pfaden und ein Semimartingal X^d. Diese Zerlegung ist durch die folgende,für alle Stoppzeiten T gültige Bedingung eindeutig bestimmt: Besitzt der Prozeß $\chi_{[\![0,T[\![}X$ eine Zerlegung $M + V$ in ein quadratisch integrierbares Martingal M und einen Prozeß V von integrabler Variation,so ist der zur Zeit T gestoppte Prozeß $(X^c)^T$ der stetige Anteil von M.

Beweis: Wir werden diesen Satz später für Hilbertraum-wertige Semimartingale beweisen.Deshalb wird an dieser Stelle auf einen Beweis verzichtet. Sollte der Leser nur am reellen Fall interessiert sein,so sei er auf [13],Chap.IV verwiesen.

4.9 Definition: Das eindeutig bestimmte lokale Martingal im obigen Satz heißt der stetige Anteil des Semimartingals X.

Bemerkung: Die Bezeichnung "stetiger Anteil" für X^c ist irreführend: X^d kann zum Beispiel durchaus ein Prozeß von beschränkter Variation mit stetigen Pfaden sein.Gemeint ist,daß X^d keinen Martingalanteil mit stetigen Pfaden enthält.Wir wollen trotzdem diese allgemein übliche Bezeichnung für X^c benutzen.

Für lokale Martingale mit stetigen Pfaden kann durch optionales Stoppen die quadratische Variation $\langle M,M\rangle$ definiert werden.

4.10 Satz: Es seien M und N lokale Martingale mit stetigen Pfaden. Dann existiert genau ein prävisibler Prozeß $\langle M,N\rangle$ von beschränkter Variation mit $\langle M,N\rangle_0 = M_0N_0$, derart daß $MN - \langle M,N\rangle$ ein lokales Martingal ist.

Beweis: Definiere die isotone Folge (T_n) von Stoppzeiten durch $T_n(\omega) = \inf\{t \in \mathbb{R}_+ : |M(t,\omega)| \vee |N(t,\omega)| \geq n\}$ für alle $\omega \in \Omega$. Es gilt $\lim_n T_n = \infty$, und wegen der Stetigkeit der Pfade sind

für jedes n die zur Zeit T_n gestoppten Prozesse M^{T_n} und N^{T_n} quadratisch integrierbare Martingale. Wir definieren $\langle M,N\rangle$ durch die für jedes n gültige Gleichheit $\langle M,N\rangle^{T_n} := \langle M^{T_n}, N^{T_n}\rangle$. Daß $\langle M,N\rangle$ auf diese Weise wohldefiniert ist, die geforderte Eigenschaften besitzt und eindeutig bestimmt ist, folgt aus der Eindeutigkeit der Doob-Meyer Zerlegung.

Aus der Definition folgt unmittelbar, daß der Prozeß $X = (X^1,\dots,X^n)$ mit Werten im $\mathbb{R}^n$ genau dann ein Semimartingal ist, wenn jede Komponente X^j ein Semimartingal ist. Bei gegebener zweifach differenzierbarer Funktion $F: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ schreiben wir D^iF für die partielle Ableitung von F nach der i-ten Variablen. Analog wird die Bezeichnung $D^{ij}F$ verwendet.

4.11 Satz: Es seien $X = (X^1,\dots,X^n)$ ein Semimartingal mit Werten im $\mathbb{R}^n$ und F eine zweifach stetig differenzierbare Funktion auf $\mathbb{R}^n$. Dann ist der Prozeß FoX ein Semimartingal, und es gilt P-fast sicher für alle $t \in \mathbb{R}_+$:

$$\begin{aligned} FoX_t = FoX_0 &+ \Sigma_i \int_{]0,t]} D^iFoX_{s-}\, dX_s \\ &+ 1/2 \ \Sigma_{i,j} \int_0^t D^{ij}FoX_{s-}\, d\langle X^{ic}, X^{jc}\rangle_s \\ &+ \Sigma_{0<s\leq t} [FoX_s - FoX_{s-} - \Sigma_i D^iFoX_{s-}(\Delta X_s^i)] \end{aligned}$$

Bemerkung: In der obigen Formel wird $X_{0-} = 0$ gesetzt. Die Schreibweise $\int_{]0,t]} D^iFoX_{s-}\, dX_s$ ist eine Abkürzung für $\int_0^t D^iFoX_{s-}\, dX_s - (D^iFoX_{0-})X_0^i$. Die in der Formel auftretende Summe konvergiert absolut.

Beweis: Für den Beweis verweisen wir auf [13], Chap. IV, 21.

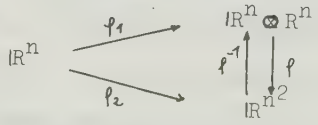
Wir kommen nun zur angekündigten Umformulierung der Itô-Formel. Seien X ein Semimartingal mit Werten in einem endlichdimensionalen Banachraum E, G ein weiterer endlichdimensionaler Banachraum und Z ein lokalbeschränkter Prozeß mit Werten im Raum $\mathcal{L}(E,G)$. Das stochastische Integral $\int Z\, dX$ wird als

ein Prozeß mit Werten in G auf folgende Art konstruiert: Man wählt Basen von E und G. Bezüglich dieser Basen kann $\mathcal{L}(E,G)$ als Raum von Matrizen betrachtet werden. Das stochastische Integral wird sodann komponentenweise definiert.

Als nächstes wollen wir einige einfache Tatsachen aus der linearen Algebra ins Gedächnis zurückrufen. Wir betrachten den Vektorraum $\mathbb{R}^n$ mit der kanonischen Basis $(e_1,\dots,e_n)$. Die kanonische Basis von $\mathbb{R}^{n^2}$ indizieren wir mit $\{(i,j): i,j=1,\dots,n\}$, d.h. $\{e_{ij}: i,j=1,\dots,n\}$ sei die kanonische Basis von $\mathbb{R}^{n^2}$. Das Tensorprodukt $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ hat dann die Basis $\{e_i \otimes e_j: i,j=1,\dots,n\}$. Weiterhin ist $\mathbb{R}^n \otimes \mathbb{R}^n$ als Vektorraum isomorph zu $\mathbb{R}^{n^2}$ unter der linearen Abbildung φ, die $e_i \otimes e_j$ auf e_{ij} abbildet. Wir definieren die Abbildung φ_1 durch $\varphi_1(x) = x \otimes x$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$, d.h.

$$\varphi_1(\Sigma_i \alpha_i e_i) = (\Sigma_i \alpha_i e_i) \otimes (\Sigma_i \alpha_i e_i) = \Sigma_{i,j} \alpha_i \alpha_j e_i \otimes e_j .$$

Die Abbildung φ_2 von $\mathbb{R}^n$ nach $\mathbb{R}^{n^2}$ sei definiert durch $\varphi_2(\Sigma_i \alpha_i e_i) = \Sigma_{i,j} \alpha_i \alpha_j e_{ij}$ für alle $x = \Sigma_i \alpha_i e_i \in \mathbb{R}^n$. Dann sind offensichtlich die folgenden beiden Diagramme kommutativ:



Wir erhalten damit den folgenden Satz, dessen Beweis wegen der vorausgegangenen Überlegungen und Satz 4.10 bereits erbracht ist.

4.12 Satz: Es sei X ein lokales Martingal mit stetigen Pfaden und Werten im $\mathbb{R}^n$. Mit $M^{\otimes 2}$ bezeichnen wir den Prozeß mit Werten im $\mathbb{R}^n \otimes \mathbb{R}^n$, welcher durch $M^{\otimes 2}(t,\omega) = M(t,\omega) \otimes M(t,\omega)$ für alle $(t,\omega) \in \mathbb{R}_+ \times \Omega$ gegeben ist. Dann existiert genau ein präviabler Prozeß $\langle M,M \rangle$ von beschränkter Variation mit Werten in $\mathbb{R}^n \otimes \mathbb{R}^n$, derart daß $M_0^{\otimes 2} = \langle M,M \rangle_0$ und $M^{\otimes 2} - \langle M,M \rangle$ ein lo-

kales Martingal ist. In Komponentenschreibweise bezüglich der kanonischen Basen von $\mathbb{R}^n$ bzw. $\mathbb{R}^n \otimes \mathbb{R}^n$ gilt $(M^{\otimes 2})^{i,j}(t,\omega) = M^i(t,\omega) \otimes M^j(t,\omega)$ und $\langle M,M\rangle^{ij}(t,\omega) = \langle M^i,M^j\rangle(t,\omega)$.

Es sei daran erinnert, daß für eine zweifach differenzierbare Funktion F von $\mathbb{R}^n$ nach $\mathbb{R}^m$ die Ableitung DF eine Abbildung in $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^m)$ und D^2F eine Abbildung in $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n \otimes \mathbb{R}^n,\mathbb{R}^m)$ ist.

4.13 Satz (Itô-Formel): Es seien X ein Semimartingal mit Werten in dem Vektorraum $\mathbb{R}^n$ und F eine zweifach stetig differenzierbare Abbildung auf $\mathbb{R}^n$ mit Werten in $\mathbb{R}^m$. Dann ist der Prozeß FoX ein Semimartingal, und es gilt P-fast sicher für alle $t \in \mathbb{R}_+$:

$$FoX_t = FoX_o + \int_{]0,t]} DFoX_{s-} + 1/2 \int_0^t D^2FoX_{s-}\, d\langle X^c,X^c\rangle_s$$
$$+ \sum_{0<s\leq t} [FoX_s - FoX_{s-} - DFoX_{s-}(\Delta X_s)] .$$

Beweis: F ist von der Form $F = (F_1,\ldots,F_m)$. Unter Zuhilfenahme des Satzes 4.12 folgt der obige Satz, indem man die Formel von Satz 4.11 auf jede Komponente F_i von F anwendet.

§3 Verallgemeinerte Martingale mit Werten in einem geordneten Banachraum als Bilder reeller stochastischer Prozesse

Es sei $X = X(t,\omega,\omega')$ ein auf einem Produktwahrscheinlichkeitsraum $(\Omega\times\Omega',\mathfrak{F}\otimes\mathfrak{F}',P\otimes P')$ definierter stochastischer Prozeß mit der Eigenschaft,daß für jedes $t \in \mathbb{R}_+$ X_t ein Element von $L^1(P\otimes P')$ ist.Nach dem Satz von Fubini definiert dann die Abbildung $(t,\omega) \longrightarrow X(t,\omega,.)$ einen stochastischen Prozeß auf $(\Omega,\mathfrak{F},P)$ mit Werten in $L^1(P')$, den wir mit ϕoX bezeichnen wollen. Wenn nun E ein Banachraum und ψ eine lineare Abbildung von $L^1(P')$ in E ist,dann ist $\psi o\phi oX$ ein E-wertiger Prozeß. Das Hauptziel dieses Paragraphen ist die Umkehrung dieser Konstruktion. Zu einem auf $(\Omega,\mathfrak{F},P)$ definierten E-wertigen Prozeß Y soll also ein Prozeß X und eine Abbildung ψ wie oben konstruiert werden,derart daß $Y = \psi o\phi oX$ gilt. Diese Konstruktion wird es ermöglichen,für reelle verallgemeinerte Martingale bekannte Resultate direkt auf den vektorwertigen Fall zu übertragen.

Zunächst wollen wir den Wertebereich Bochner-integrierbarer Funktionen genauer studieren.

1 Bochner-integrierbare Funktionen. Es seien (S,Σ,μ) ein positiver,endlicher Maßraum und E ein mit der Norm p ausgestatteter Banachraum.Der Banachraum der (Äquivalenzklassen von) μ-Bochner-integrierbaren Funktionen mit Werten in E wird mit $L^1_E(\mu)$ bezeichnet. Es sei daran erinnert,daß eine Funktion u von S in E Bochner-integrierbar heißt,wenn gilt:

(a) $x'ou$ ist Σ-meßbar für alle $x' \in E'$,

(b) $u(S)$ ist in einem separablen Teilraum von E enthalten ,

(c) pou ist ein Element von $L^1(\mu)$.

Wir beachten,daß der Unterraum $\mathcal{S}$ der einfachen Funktionen

$u \in L^1_E(\mu)$ dicht in $L^1_E(\mu)$ liegt.Damit ist die Einbettung φ des Tensorproduktes $L^1(\mu) \otimes E$ in $L^1_E(\mu)$, wobei das Element $u = \sum_{i=1}^n f_i \otimes x_i$ von $L^1(\mu) \otimes E$ auf die Bochner-integrierbare Funktion $\varphi(u) := \sum_{i=1}^n f_i x_i$ abgebildet wird,eine Einbettung mit dichtem Bild. Stattet man $L^1(\mu) \otimes E$ mit der projektiven Tensorprodukt-Norm aus,so ist φ sogar eine Isometrie,wie man leicht einsieht,wenn man φ auf Elemente der Form $u = \sum_{i=1}^n \alpha_i \chi_{A_i} \otimes x_i$ ($\alpha_i \in \mathbb{R}$, $x_i \in E$ und $A_i \in \Sigma$ mit $A_i \wedge A_j = \emptyset$ für $i \neq j$) einschränkt. (Die projektive Tensorprodukt-Norm ist gegeben durch $\|u\| = \inf \{ \sum_i \|f_i\| p(x_i) : u = \sum_i f_i \otimes x_i \}$).

Wir bezeichnen mit $L^1(\mu) \otimes_\pi E$ den normierten Raum des Tensorprodukts und mit $L^1(\mu) \tilde{\otimes}_\pi E$ dessen Vervollständigung. Nach dem eben Gesagten induziert φ einen isometrischen Isomorphismus zwischen den Banachräumen $L^1(\mu) \tilde{\otimes}_\pi E$ und $L^1_E(\mu)$, welcher wieder mit φ bezeichnet werde.

Wenn E ein Banachverband mit positivem Kegel E_+ ist,dann ist auch $L^1_E(\mu)$ mit der natürlichen Ordnung ein Banachverband. Dies läßt sich unmittelbar aus der Definition herleiten.Die Menge $\{u \in L^1(\mu) \tilde{\otimes}_\pi E : u = \sum_{i=1}^n f_i \otimes x_i$, $f_i \in L^1(\mu)_+$, $x_i \in E_+\}$ und damit auch ihr Abschluß K sind positive Kegel in $L^1(\mu) \tilde{\otimes}_\pi E$. $L^1 \tilde{\otimes}_\pi E$ ist ein Banachverband bezüglich der durch K induzierten Ordnung.Es ist ferner leicht einzusehen,daß φ ein Banachverbandsisomorphismus zwischen $L^1(\mu) \tilde{\otimes}_\pi E$ und $L^1_E(\mu)$ ist.(Einzelheiten über geordnete Tensorprodukte kann man in [17],Chap.IV nachlesen).

Wir fassen zusammen:

1.1 Satz: Es seien (S,Σ,μ) ein Maßraum mit positivem,endlichem Maß μ und E ein Banachraum. Die Abbildung φ , die $u = \sum_{i=1}^n f_i \otimes x_i \in L^1(\mu) \otimes E$ auf $\varphi(u) = \sum_{i=1}^n f_i x_i \in L^1_E(\mu)$ abbildet,induziert eine lineare Isometrie zwischen dem vervollstän-

digten Tensorprodukt $L^1(\mu)\hat{\otimes}_\pi E$ und dem Raum $L^1_E(\mu)$. Wenn E ein Banachverband ist,so sind die Räume $L^1(\mu)\hat{\otimes}_\pi E$ und $L^1_E(\mu)$ Banachverbände bezüglich den kanonischen Ordnungen,und φ ist ein Banachverbandsisomorphismus.

Des obigen Satzes wegen werden künftig $L^1(\mu)\hat{\otimes}_\pi E$ und $L^1_E(\mu)$ miteinander identifiziert.

Der Vorteil der Tensorproduktschreibweise liegt vor allem im folgenden

1.2 Satz: Seien G und E Banachräume. Dann ist jedes Element $u \in G\hat{\otimes}_\pi E$ darstellbar als eine absolut konvergente Summe

$$u = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i\, y_i \otimes x_i \quad ,$$

wobei $\sum_i |\lambda_i| < \infty$ und (y_i) bzw. (x_i) Nullfolgen in G bzw. E sind.

Beweis: Zum Beweis wird auf [18],Ch.III,Theorem 6.4 verwiesen.

Wir bemerken noch,daß im Falle eines Banachverbandes G die Folgen (λ_i) und (y_i) positiv gewählt werden können. Weiterhin kann man in obiger Darstellung von u anstelle der Nullfolgen auch Folgen (y_i) bzw. (x_i) mit $\|y_i\| = \|x_i\| = 1$ für alle i benutzen.

Es seien nun F ein weiterer Banachraum und ϕ eine stetige lineare Abbildung von G in F . Dann induziert ϕ eine stetige lineare Abbildung von $G\hat{\otimes}_\pi E$ in $F\hat{\otimes}_\pi E$, die durch $\phi(u) := \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i\, \phi(y_i)\otimes x_i$ für alle $u = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i\, y_i \otimes x_i$ gegeben ist. Diese induzierte Abbildung werde wiederum mit ϕ bezeichnet. Analoges gilt,wenn ϕ eine stetige lineare Abbildung von E in F ist. Als Beispiel soll die bedingte Erwartung auf $L^1_E(\mu) = L^1(\mu)\hat{\otimes}_\pi E$ angeführt werden: Sei Σ_o eine σ-Unteralgebra von Σ . Dann ist für $u = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i\, f_i \otimes x_i$ die bedingte Erwartung $E(u\,|\,\Sigma_o)$ gegeben durch $E(u\,|\,\Sigma_o) = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i\, E(f_i\,|\,\Sigma_o)\otimes x_i$.

Eine Besonderheit sollte hier noch erwähnt werden. Wenn Φ eine lineare Abbildung von E in F ist,so ist das dem $\Phi(u)$ entsprechende Element in $L^1_E(\mu)$ gerade die Hintereinanderausführung $\Phi \circ u$ der Abbildungen u und Φ. Wir werden deshalb in dieser Situation die letztere Schreibweise verwenden.

Es sei nun ein weiterer Maßraum (S',Σ',μ') mit einem positiven endlichen Maß μ' gegeben. Zu einem Element $f \in L^1(\mu \otimes \mu')$ definiere man für jedes $s \in S$ die Funktion $u(s)$ durch $u(s) := f(s,.)$. Nach dem Satz von Fubini ist $u(s)$ für μ-fast alle $s \in S$ ein Element von $L^1(\mu')$. Durch Approximation mit einfachen Funktionen sieht man,daß u ein Element von $L^1_{L^1(\mu')}(\mu)$ ist. Weiterhin ist f genau dann positiv,wenn u ein positives Element von $L^1_{L^1(\mu')}(\mu)$ ist,und es gilt die Gleichheit $\|f\|_1 = \int |f(s,s')| \, d\mu \otimes \mu'(s,s') = \int\int |u(s)| \, d\mu' \, d\mu(s) = \|u\|_1$. Es gilt also der folgende

1.3 Satz: Es seien (S,Σ,μ) und (S',Σ',μ') Maßräume mit positiven endlichen Maßen μ bzw. μ'. Die Abbildung Φ, welche jedes $f \in L^1(\mu \otimes \mu')$ auf das durch $\Phi(f)(s) = f(s,.)$ für alle $s \in S$ gegebene Element von $L^1_{L^1(\mu')}(\mu)$ abbildet,ist ein isometrischer Isomorphismus zwischen den Banachverbänden $L^1(\mu \otimes \mu')$ und $L^1_{L^1(\mu')}(\mu)$.

Φ wird als der kanonische Isomorphismus zwischen den Banachverbänden $L^1(\mu \otimes \mu')$ und $L^1_{L^1(\mu')}(\mu)$ bezeichnet.

1.4: Mit Hilfe des obigen Satzes gelingt es, E-wertige Bochnerintegrierbare Funktionen durch reelle Funktionen darzustellen. Es sei ℓ^1 der Raum der summierbaren rellen Folgen. Aus Gründen, die später einsichtig werden,wollen wir ℓ^1 als einen Raum von integrierbaren Funktionen über einem Wahrscheinlichkeitsraum betrachten,d.h. wir setzen $\Omega' = \mathbb{N}$, die Menge der natürlichen Zah-

len, $\mathfrak{F}'$ sei die Potenzmenge $\mathfrak{P}(\mathbb{N})$ von $\mathbb{N}$, und P' sei ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $\mathfrak{F}'$, derart daß $P'(\{n\}) \neq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt. Wir schreiben künftig abkürzend ℓ^1 für den Raum $L^1(\Omega', \mathfrak{F}', P')$.

1.5 Satz: Seien (S, Σ, μ) ein Maßraum mit positivem endlichem Maß μ, $(\Omega', \mathfrak{F}', P')$ wie in 1.4, E ein Banachraum und $u \in L^1_E(\mu)$. Dann existieren eine Kontraktion ψ von ℓ^1 in E und ein Element $v \in L^1_{\ell^1}(\mu)$, derart daß $\psi \circ v = u$ gilt.

Beweis: Nach Satz 1.2 ist u eine absolut konvergente Summe $u = \sum_i \lambda_i f_i \otimes x_i$ mit $\sum_i |\lambda_i| < \infty$, einer Nullfolge (f_i) in $L^1(\mu)$ und einer Folge (x_i) in E, deren Glieder die Normbedingung $p(x_i) = 1$ für alle $i=1,2,\ldots$ erfüllen. Sei $e_i \in \ell^1$ die Funktion $e_i = \chi_{\{i\}}$ $(i=1,2,\ldots)$. Setze für jedes Element $\sum_i \alpha_i e_i \in \ell^1$ $\psi(\sum_i \alpha_i e_i) = \sum_i \alpha_i P'(\{i\})\, x_i$. Es gilt $p(\psi(\sum_i \alpha_i e_i) \leq \sum_i p(\alpha_i P'(\{i\})\, x_i) = \sum_i |\alpha_i| P'(\{i\}) = \|\sum_i \alpha_i e_i\|_1$. Folglich ist ψ eine lineare Kontraktion. Wenn man nun das Element $v \in L^1_{\ell^1}(\mu)$ durch $v := \sum_i \alpha_i (P'(\{i\})^{-1})\, f_i \otimes e_i$ definiert, dann erfüllt dieses v offensichtlich die Gleichheit $\psi \circ v = u$.

Satz 1.2 bietet sich an, um den Wertebereich von Bochner-integrierbaren Funktionen auf folgende Art zu charakterisieren:

1.6 Satz: Sei $u \in L^1_E(\mu)$. Dann existieren ein positives Element $f \in L^1(\mu)$ und eine kompakte Menge $K \subseteq E$, so daß $u(s) \in f(s)K$ gilt für μ-fast alle $s \in S$.

Beweis: Sei $u = \sum_i \lambda_i f_i \otimes x_i$, wobei $\lambda_i \geq 0$ für alle $i=1,2,\ldots$, (f_i) eine positive Nullfolge in $L^1(\mu)$, (x_i) eine Nullfolge in E ist, und $\sum_i \lambda_i < \infty$ gilt. Daß u eine derartige Darstellung besitzt, folgt aus der Bemerkung im Anschluß an Satz 1.2. (x_i) ist relativ kompakt in E, und damit ist die abgeschlossene kreisförmige konvexe Hülle K von (x_i) kompakt. Setze

$f = \sum_i \lambda_i f_i$. Nach den Voraussetzungen über die Folgen (λ_i) und (f_i) ist f ein positives Element von $L^1(\mu)$, und es gilt offensichtlich $u(s) \in f(s)K$ μ-fast überall.

Der eben bewiesene Satz zusammen mit dem nun folgenden wird das entscheidende Hilfsmittel darstellen,um Pfadkompaktheit für Quasimartingale zu beweisen.

1.7 Satz: Es seien (S,Σ,μ) und (S',Σ',μ') zwei Maßräume mit positiven endlichen Maßen und φ eine positive lineare Abbildung von $L^1(\mu)$ in $L^1(\mu')$. Das Element $u \in L^1_E(\mu)$ erfülle $u(s) \in f(s)K$ für ein $f \in L^1(\mu)_+$ und eine kompakte konvexe Teilmenge K von E . Dann gilt $\varphi(u)(s') \in \varphi(f)(s')K$ μ'-fast überall auf S' .

Beweis: Da K separabel ist,können wir annehmen,daß E separabel ist. Also ist die duale Einheitskugel U^o von E' separabel in der Schwach*-Topologie $\sigma(E',E)$, die ,eingeschränkt auf U^o , nach dem Satz von Banach-Steinhaus mit der Topologie der gleichmäßigen Konvergenz auf kompakten Teilmengen von E übereinstimmt. Nun ist K der Durchschnitt aller abgeschlossenen Halbräume,die K enthalten.Nach dem oben Gesagten existieren also ein Folge (x'_n) von Elementen von U^o und eine reelle Folge (β_n) mit $K = \bigcap_n \{x \in E: \langle x,x'_n\rangle \leq \beta_n\}$. Es genügt also zu zeigen,daß $x'_n \circ \varphi(u) \leq \beta_n f$ in $L^1(\mu')$ für alle n gilt.Nach Voraussetzung haben wir $x'_n \circ u \leq \beta_n f$, also gilt die Abschätzung $x'_n \circ \varphi(u) = \varphi(x'_n \circ u) \leq \beta_n \varphi(f)$ in $L^1(\mu')$ für alle n , und das war zu beweisen.

1.8: Neben den Räumen $L^1_E(\mu)$ werden wir auch die Räume $L^2_H(\mu)$ der quadratisch integrierbaren Funktionen mit Werten in einem Hilbertraum H heranziehen. Die Norm auf $L^2_H(\mu)$ ist gegeben durch $\|u\|_2 = \left(\int (p \circ u)^2 \, d\mu\right)^{1/2}$, wobei p wie üblich das Norm-

funktional auf H ist. Wir beachten,daß $L^2_H(\mu)$ ein Hilbertraum ist mit dem inneren Produkt $\langle u,v\rangle = \int\langle u(s),v(s)\rangle\, d\mu(s)$, wobei $(x,y)\longrightarrow\langle x,y\rangle$ das innere Produkt von H' bezeichnet.Völlig analog zum Beweis von Satz 1.1 sieht man,daß $L^2_H(\mu)$ als Hilbertraum isomorph ist zum vervollständigten Tensorprodukt $L^2(\mu)\tilde{\otimes}_\varepsilon H$, ausgestattet mit der Hilbert-Schmidt-Norm. (Das innere Produkt in $L^2(\mu)\tilde{\otimes}_\varepsilon H$ ist gegeben durch die bilineare stetige Fortsetzung der Abbildung $(f\otimes x,g\otimes y)\longrightarrow\langle x,y\rangle\int fg\, d\mu$ $(f,g\in L^2(\mu)$, $x,y\in H)$ auf $(L^2(\mu)\tilde{\otimes}_\varepsilon H)\times(L^2(\mu)\tilde{\otimes}_\varepsilon H)$. Wir identifizieren wieder $L^2_H(\mu)$ mit $L^2(\mu)\tilde{\otimes}_\varepsilon H$. Der zu dem in 1.4 definierten Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega',\mathfrak{F}',P')$ gehörige Raum der quadratisch integrierbaren Funktionen werde mit ℓ^2 bezeichnet. Die durch $\Phi(f)(s) := f(s,.)$ für alle $s\in S$ gegebene Abbildung Φ von $L^2(\mu\otimes P')$ auf $L^2_{\ell^2}(\mu)$ ist ein Hilbertraum-Isomorphismus,wie unmittelbar aus der Definition des inneren Produktes in $L^2_{\ell^2}(\mu)$ folgt.

Sei nun u ein Element von $L^2_H(\mu)$. Wegen $L^2_H(\mu)\subseteq L^1_H(\mu)$ können wir annehmen,daß die Werte von u in einem separablen abgeschlossenen Teilraum H_o von H liegen. H_o besitzt eine abzählbare Orthonormalbasis (x_n) . Da die Folge (e_n) mit $e_n = P'(\{n\})^{-1}\,\chi_{\{n\}}$ $(n=1,2,\ldots)$ eine Orthonormalbasis von ℓ^2 bildet,sind ℓ^2 und H_o als Hilberträume isomorph vermöge der stetigen linearen Abbildung ψ , die e_n auf x_n für alle n abbildet. Also ist u das Bild der Funktion $v = \psi^{-1}\circ u\in L^2_{\ell^2}(\mu)$ unter ψ . Wir resümieren in dem folgenden

1.9 Satz: Es seien H ein Hilbertraum, $(\Omega',\mathfrak{F}',P')$, Φ und ℓ^2 wie in 1.8 . Zu jedem $u\in L^2_H(\mu)$ existieren ein Hilbertraum-Isomorphismus ψ von ℓ^2 in H und ein Element $f\in L^2(\mu\otimes P')$ dergestalt,daß $\psi\circ\Phi(f) = u$ gilt.

2 Banachraum-wertige Quasimartingale als Bilder reeller Quasimartingale. Es sei Q ein Quasimartingal mit Werten in einem Banachraum E bezüglich der stochastischen Basis $\mathfrak{B} = (\Omega, \mathfrak{F}, P, (\mathfrak{F}_t))$ (siehe §1,1). Wir können ohne Einschränkung der Allgemeinheit annehmen, daß $\mathfrak{F} = \bigvee_{t \in \mathbb{R}_+} \mathfrak{F}_t$ gilt. Dem Quasimartingal Q wird ein E-wertiges Maß μ_Q zugeordnet. Die Zuordnung erfolgt in Analogie zu [12] bzw. zu [7], wo der Fall reeller Quasimartingale betrachtet wird.

Zunächst beweisen wir das folgende maßtheoretische

2.1 Lemma: Es seien m eine auf einer Algebra $\mathcal{A}$ definierte additive Mengenfunktion von beschränkter Variation mit Werten in einem Banachraum E und μ eine beschränkte σ-additive reelle Mengenfunktion auf $\mathcal{A}$. Wenn m schwach σ-additiv (bzw. schwach μ-absolut-stetig) ist, so ist die Variation $\mathrm{var}(m,.)$ von m σ-additiv (bzw. μ-absolut-stetig), und folglich ist m σ-additiv (bzw. μ-absolut-stetig).

Beweis: Wir beachten, daß die totale Variation $\mathrm{var}(m,.)$ von m gleich dem Supremum der Menge $\{\mathrm{var}(x' \circ m,.) : x' \in E', \|x'\| \leq 1\}$ im Vektorverband $\mathrm{ba}(\mathcal{A})$ der beschränkten additiven reellen Mengenfunktionen auf $\mathcal{A}$ ist. Da jedes Element dieser Menge σ-additiv (bzw. μ-absolut-stetig) ist, ist auch $\mathrm{var}(m,.)$ σ-additiv (bzw. μ-absolut-stetig). Wir verzichten auf einen elementaren Beweis dieser Tatsache und bemerken nur, daß sie direkt aus der Beobachtung folgt, daß die Menge der σ-additiven (bzw. μ-absolut-stetigen) Elemente von $\mathrm{ba}(\mathcal{A})$ ein Band in $\mathrm{ba}(\mathcal{A})$ ist.

2.2 Lemma: Es sei Q ein Quasimartingal der Klasse (D) mit Werten in dem Banachraum E. Für jedes $F \in \bigcup_{t \in \mathbb{R}_+} \mathfrak{F}_t$ existiert $\mu_1(F) := \lim_{t \to \infty} E(\chi_F Q_t)$, und die dadurch definierte Mengenfunktion μ_1 ist σ-additiv, P-absolut-stetig und von beschränk-

ter Variation. μ_1 besitzt also eine eindeutige Fortsetzung zu einem P-absolut stetigen Maß von beschränkter Variation auf der σ-Algebra $\mathfrak{F} = \bigvee_{t\in\mathbb{R}_+} \mathfrak{F}_t$.

Beweis: Daß der oben angegebene Limes für jedes $F \in \bigvee_{t\in\mathbb{R}_+} \mathfrak{F}_t$ existiert, folgt unmittelbar aus der Definition eines Quasimartingals. Weiterhin ist die Totalvariation $\mathrm{var}(\mu_1,\Omega)$ offensichtlich kleiner als $\sup_{t\in\mathbb{R}_+} \|Q_t\|_1$ und somit endlich. Da die Menge $\{x'oQ_t : t \in \mathbb{R}_+\}$ gleichgradig integrierbar ist für jedes $x' \in E'$, ist $x'o\mu_1$ P-absolut-stetig für jedes $x' \in E'$. Nach Lemma 2.1 ist μ_1 also σ-additiv (bezüglich der Norm auf E) und P-absolut-stetig.

Die nach dem obigen Lemma existierende Fortsetzung von μ_1 wird mit $\bar{\mu}_1$ bezeichnet. Als nächstes soll das von Q erzeugte gemittelte Prämaß i_Q (siehe §1,2) fortgesetzt werden. Nach §2 Satz 2.7 ist $x'oi_Q$ σ-additiv für jedes $x' \in E'$. Mit Hilfe von Lemma 2.1 sieht man also, daß i_Q eine eindeutige Fortsetzung zu einem σ-additiven Maß i_Q' auf die σ-Algebra Σ_p der prävisiblen Mengen besitzt. Das Maß μ_2 auf der σ-Algebra $\Sigma = \mathcal{B}\otimes\mathfrak{F}$ ($\mathcal{B}$ ist die Borel σ-Algebra auf $\mathbb{R}_+$) wird durch $\int Z\, d\mu_2 := \int \pi_p Z\, di_Q'$ für alle beschränkten meßbaren Prozesse Z definiert, wobei π_p die prävisible Projektion (siehe §2 Satz 2.2) ist. μ_2 ist also die prävisible Fortsetzung von i_Q' .

μ_1 und μ_2 werden nun zu einem Maß auf der σ-Algebra $\hat{\Sigma} := \hat{\mathcal{B}}\otimes\mathfrak{F}$ zusammengesetzt. ($\hat{\mathcal{B}}$ bezeichnet die Borel σ-Algebra auf $\bar{\mathbb{R}}_+ := \mathbb{R}_+ \cup \{\infty\}$). Wir beachten, daß ein Element $A \in \hat{\Sigma}$ die Form $A = (A\cap\mathbb{R}_+ x\Omega) \cup \{\infty\} xF$ für ein $F \in \mathfrak{F}$ hat und setzen $\mu_Q(A) := \mu_2(A\cap\mathbb{R}_+ x\Omega) - \bar{\mu}_1(F)$ für $A = (A\cap\mathbb{R}_+ x\Omega) \cup \{\infty\} xF \in \hat{\Sigma}$.

2.3 Definition: Das E-wertige Maß μ_Q auf $\hat{\Sigma}$ heißt das zu Q assoziierte Maß.

Von der Konstruktion her folgen unmittelbar die nachstehenden beiden Eigenschaften des zu Q assoziierten Maßes μ_Q :

(a) μ_Q ist von beschränkter Variation

(b) Wenn F eine P-Nullmenge ist, dann ist $[0,\infty]\times F$ eine μ_Q-Nullmenge.

$\mathfrak{F}_t$ kann mit der σ-Unteralgebra $\{[0,\infty]\times F : F \in \mathfrak{F}_t\}$ von $\hat{\Sigma}$ identifiziert werden. Aus (b) folgt, daß die Einschränkung der Variation $\mathrm{var}(\mu_Q,.)$ von μ_Q auf $\mathfrak{F}_t$ ein P-absolut-stetiges Maß ist. Für den Rest dieses Paragraphen schreiben wir $|\mu_Q|$ anstelle von $\mathrm{var}(\mu_Q,.)$. $E^{|\mu_Q|}(.\mid \mathfrak{F}_t)$ bezeichnet die bedingte Erwartung bezüglich des Maßes $|\mu_Q|$.

2.4 Satz: Es seien Q ein Quasimartingal der Klasse (D) mit Werten im Banachraum E und μ_Q das zu Q assoziierte Maß. Weiterhin sei $\mathfrak{F}_t$ mit der σ-Unteralgebra $\{[0,\infty]\times F : F \in \mathfrak{F}_t\} \subseteq \hat{\Sigma}$ identifiziert. Besitzt μ_Q eine Radon-Nikodym-Dichte u bezüglich $|\mu_Q|$, so gilt

$$Q_t = h_t\, E^{|\mu_Q|}(-\chi_{]t,\infty]\times\Omega}\, u \mid \mathfrak{F}_t)$$

P-fast sicher für alle $t \in \mathbb{R}_+$, wobei h_t die Radon-Nikodym-Dichte von $\mathrm{Res}_{\mathfrak{F}_t}|\mu_Q|$ bezüglich P ist.

Bemerkung: Der obige Satz bleibt richtig, wenn $|\mu_Q|$ durch ein äquivalentes positives Maß ersetzt wird.

Beweis: Sei $F \in \mathfrak{F}_t$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
&\int_F h_t\, E^{|\mu_Q|}(-\chi_{]t,\infty]\times\Omega}\, u \mid \mathfrak{F}_t)\, dP = \\
&\quad = \int_{[0,\infty]\times F} E^{|\mu_Q|}(-\chi_{]t,\infty]\times\Omega}\, u \mid \mathfrak{F}_t)\, d|\mu_Q| \\
&\quad = -\int_{[0,\infty]\times F} \chi_{]t,\infty]\times\Omega}\, u\, d|\mu_Q| \\
&\quad = -\mu_Q(]t,\infty]\times F) = -\mu_2(]t,\infty[\times F) + \bar{\mu}_1(F) \\
&\quad = -\lim_{s\to\infty} i_Q(]t,s]\times F) + \bar{\mu}_1(F) \\
&\quad = -\lim_{s\to\infty} E(\chi_F Q_s) + E(\chi_F Q_t) + \lim_{s\to\infty} E(\chi_F Q_s) \\
&\quad = \int_F Q_t\, dP \quad .
\end{aligned}$$

Das war aber zu beweisen.

Die Bezeichnungen für die folgenden beiden Korollare sind die gleichen wie in 2.2 - 2.4 .

Korollar 1: Unter den Voraussetzungen von Satz 2.4 ist Q ein gleichgradig integrierbares Martingal mit $Q_0 = 0$ genau dann, wenn $[0,\infty[\times \Omega$ eine μ_Q-Nullmenge ist oder äquivalenterweise, wenn $u = \chi_{\{\infty\} \times \Omega} u$ $|\mu_Q|$-fast überall gilt.

Beweis: Daß die beiden Bedingungen des Korollars äquivalent sind, ist klar. Wenn nun Q ein Martingal mit $Q_0 = 0$ ist, so ist $i_Q = 0$. Folglich ist $[0,\infty[\times \Omega$ eine μ_2-Nullmenge, woraus die Notwendigkeit der Bedingung folgt. Wir zeigen, daß die Bedingung hinreichend ist. Es ist klar, daß ein Martingal der Klasse (D) gleichgradig integrierbar ist. Es genügt also zu zeigen, daß Q ein Martingal ist. Das folgt aber aus der für alle $s \leq t \in \mathbb{R}_+$ und $F \in \mathfrak{F}_s$ geltenden Gleichheit $E(\chi_F(Q_t - Q_s)) = \mu_Q(]s,t] \times F) = 0$.

Korollar 2: Q und μ_Q erfülle die Voraussetzungen von Satz 2.4. Betrachte die Bedingung (*): $\mu_Q([0,\infty] \times F) = 0$ für alle $F \in \mathfrak{F}$.

(a) Falls (*) erfüllt ist, gilt P-fast sicher für alle $t \in \mathbb{R}_+$
$Q_t = h_t \, E^{|\mu_Q|}(-\chi_{]t,\infty] \times \Omega} u \mid \mathfrak{F}) = h_t \, E^{|\mu_Q|}(\chi_{[0,t[\times \Omega} u \mid \mathfrak{F})$.

(b) Wenn Q ein normaler prävisibler Prozeß von integrabler Variation ist, dann ist (*) erfüllt.

(c) Falls (*) erfüllt ist, ist Q ein Prozeß von integrabler Variation, dessen normale Modifikation, falls diese existiert, prävisibel ist.

Beweis: Die Behauptung (*) impliziert für alle $F \in \mathfrak{F}$
$\int \chi_{]t,\infty] \times F} \, u \, d|\mu_Q| = \int -\chi_{[0,t] \times F} \, u \, d|\mu_Q|$ und damit
$E^{|\mu_Q|}(\chi_{]t,\infty] \times \Omega} u \mid \mathfrak{F}) = E^{|\mu_Q|}(-\chi_{[0,t[\times \Omega} u \mid \mathfrak{F})$ für alle $t \in \mathbb{R}_+$.
Zusammen mit Satz 2.4 beweist diese Gleichheit die Behauptung

(a), wenn es gelingt, die $\mathfrak{F}_t$-Meßbarkeit von $E^{|\mu_Q|}(\chi_{[0,t]\times\Omega} u | \mathfrak{F})$ zu zeigen. Dazu beachten wir, daß die prävisible Projektion des Prozesses $\chi_{[0,t]\times F}$ der Prozeß $M\chi_{[0,t]\times\Omega}$ ist, wobei $M=(M_s)$ die linksseitig stetige Modifikation des bis auf eine Modifikation gegebenen Martingals $t \longrightarrow E(\chi_F | \mathfrak{F}_{t-})$ ist (siehe Bemerkung im Anschluß an §2 Satz 2.1). Insbesondere stimmen die prävisiblen Projektionen von $E(\chi_F | \mathfrak{F}_t)\chi_{[0,t]\times\Omega}$ und von $\chi_{[0,t]\times F}$ überein. Damit gilt für alle $F \in \mathfrak{F}$ die Gleichheit

$$\int_F \chi_{[0,t]\times\Omega} u \, d|\mu_Q| = \int \chi_{[0,t]\times F} \, d\mu_2 = \int \pi_p(\chi_{[0,t]\times F}) \, d\mu_2$$
$$= \int E(\chi_F | \mathfrak{F}_t) \chi_{[0,t]\times\Omega} u \, d\mu_Q.$$

Diese Gleichheit beweist die gewünschte $\mathfrak{F}_t$-Meßbarkeit.

Aus (a) und der eben bewiesenen Gleichheit schließen wir, daß

$$\|\int_F Q_t - Q_s \, dP\| = \|\int_F h_t E^{|\mu_Q|}(\chi_{[0,t]\times\Omega} u|\mathfrak{F}) - h_s E^{|\mu_Q|}(\chi_{[0,s]\times\Omega} u|\mathfrak{F}) \, dP\|$$
$$= \|\int \chi_{]s,t]\times F} \, d\mu_2\| \leq |\mu_Q|(]s,t]\times F)$$

für alle $t \geqslant s$ erfüllt ist. Folglich gilt $\|Q_t - Q_s\|_1 \leq |\mu_Q|(]s,t]\times\Omega)$ für alle $t \geqslant s$, und aus der Endlichkeit der Totalvariation von μ_Q folgt, daß Q ein Prozeß von integrabler Variation ist. Um den zweiten Teil der Behauptung (c) zu beweisen, können wir annehmen, daß Q reell ist. In diesem Fall folgt die Behauptung unmittelbar aus den Sätzen 2.3 und 2.4 von §2. Auch für den Beweis von (b) können wir Q als reell annehmen. Wieder nach §2 Satz 2.3 und Satz 2.4 gilt für alle $F \in \mathfrak{F}$

$\mu_2([0,\infty[\times F) = E(\int_0^\infty \chi_{[0,\infty[\times F}(s) \, dQ_s) = \lim_{s\to\infty} E(\chi_F Q_s)$ und folglich $\mu_Q([0,\infty]\times F) = 0$.

Mit Satz 2.4 sind die Voraussetzungen dafür geschaffen, die Ergebnisse des Abschnittes 1 dieses Paragraphen anzuwenden. Zu einem gegebenen Quasimartingal Q wurde nämlich eine Bochnerintegrierbare Funktion u und eine Familie (φ_t) von positiven Operatoren von $L^1(|\mu_Q|)$ in $L^1(P)$ gefunden, so daß $Q_t = \varphi_t u$

für alle $t \in \mathbb{R}_+$ gilt. Bevor wir zu diesen Anwendungen gelangen, wird noch eine teilweise Umkehrung des Satzes bewiesen. Da im Beweis des folgenden Lemmas ein einfacher Spezialfall des Konvergenzsatzes für Martingale benutzt wird, den wir jedoch im vektorwertigen Fall als Korollar erhalten wollen, wird dieses Lemma nur für den Fall reeller Quasimartingale formuliert.

2.5 Lemma: Es sei ν ein endliches positives reelles Maß auf $\hat{\Sigma}$, derart daß die Einschränkung von ν auf die mit $\mathfrak{F}$ identifizierte σ-Unteralgebra $\{[0,\infty]\times F : F \in \mathfrak{F}\} \subseteq \hat{\Sigma}$ P-absolut-stetig ist. Mit h bezeichnen wir die Radon-Nikodym-Dichte dieser Einschränkung bezüglich P und schreiben $h_t = E(h \mid \mathfrak{F}_t)$ $(t \in \mathbb{R}_+)$. Dann definiert für jedes $u \in L^1(\nu)$ die Gleichung

$$Q_t = h_t \, E^{\nu}(\chi_{]t,\infty]\times\Omega} u \mid \mathfrak{F}_t)$$

bis auf eine Modifikation ein reelles Quasimartingal $Q = (Q_t)$.

Bemerkung: Wenn im obigen Lemma zusätzlich gefordert wird, daß $u \in L^1(\nu)$ prävisibel ist, dann erfüllt u die Bedingung $d\mu_Q = u \, d\nu$ und ist somit eindeutig bestimmt.

Beweis: Wir müssen zeigen, daß Q die Bedingungen (2) und (4) von §1,2 erfüllt. (4) folgt dabei aus §1 Lemma 2.1 mit Hilfe der Beobachtung, daß für alle $F \in \mathfrak{F}_s$ und $s \leq t \in \mathbb{R}_+$

$$|E(\chi_F (Q_t - Q_s))| = |\int \chi_{]t,\infty]\times F} u - \chi_{]s,\infty]\times F} u \; d\nu|$$
$$\leq \int \chi_{]s,t]\times F} |u| \, d\nu$$

und folglich $\|E(Q_t - Q_s \mid \mathfrak{F}_s)\|_1 \leq \int \chi_{]s,t]\times\Omega} |u| \, d\nu$ gilt.
Um (2) zu zeigen, schreiben wir für $t \geq s$

$$\|Q_t - Q_s\|_1 \leq \|E^{\nu}(\chi_{]t,\infty]\times\Omega} u \mid \mathfrak{F}_t) - E^{\nu}(\chi_{]t,\infty]\times\Omega} u \mid \mathfrak{F}_s)\|_1 +$$
$$+ \|E^{\nu}(\chi_{]s,t]\times\Omega} u \mid \mathfrak{F}_s)\|_1 + \|(h_t - h_s) E^{\nu}(\chi_{]s,\infty]\times\Omega} u \mid \mathfrak{F}_s)\|_1 .$$

Für $t \to s$ geht der erste Ausdruck gegen 0 nach dem Konvergenzsatz für reelle Martingale. Der zweite geht offensichtlich gegen 0, und der dritte Ausdruck geht wiederum gegen 0, wenn man den

Konvergenzsatz auf das Martingal $M_r := h_{s+r}\, E^{\nu}(\chi_{]s,\infty]\times\Omega}\, u \mid \mathfrak{F}_s)$ anwendet.

Ein Banachraum E besitzt die Radon-Nikodym-Eigenschaft, wenn jedes E-wertige Maß von beschränkter Variation, das absolut-stetig bezüglich eines positiven Maßes μ ist, eine Radon-Nikodym-Dichte bezüglich μ besitzt. Banachräume mit dieser Eigenschaft werden als (RN)-Banachräume bezeichnet. Man beachte, daß für einen (RN)-Banachraum E die Voraussetzung des Satzes 2.4, daß μ_Q eine Radon-Nikodym-Dichte bezüglich $|\mu_Q|$ besitzt, stets erfüllt ist.

2.6 Satz: Es sei Q ein Quasimartingal der Klasse (D) mit Werten in dem Banachraum E, derart daß μ_Q die Voraussetzungen von Satz 2.4 erfüllt. Dann existieren ein positives $f \in L^1(P)$ und eine kompakte Menge $K \subseteq E$ mit $Q_t(\omega) \in E(f \mid \mathfrak{F}_t)(\omega)\, K$ für P-fast alle $\omega \in \Omega$ und alle $t \in \mathbb{R}_+$.

Beweis: Es werden die Bezeichnungen von 2.3 und 2.4 mit ν anstelle von $|\mu_Q|$ benützt. Nach Satz 1.6 existieren eine kompakte Menge $K \subseteq E$ und ein positives Element $g \in L^1(\nu)$ mit $-u(s,\omega) \in g(s,\omega)\, K$ für alle $(s,\omega) \in \bar{\mathbb{R}}_+ \times \Omega$. K kann ohne Einschränkung der Allgemeinheit konvex und kreisförmig angenommen werden. Da die bedingte Erwartung eine positive Abbildung auf dem Raum $L^1(\nu)$ ist, gilt nach den Sätzen 1.7 und 2.4 mit geeigneten Versionen der bedingten Erwartungen für P-fast alle $\omega \in \Omega$ und alle $t \in \mathbb{R}_+$

$$Q_t(\omega) \in h_t(\omega)\, E^{\nu}(\chi_{]t,\infty]\times\Omega}\, g \mid \mathfrak{F}_t)(\omega)\, K \subseteq h_t(\omega)\, E^{\nu}(g \mid \mathfrak{F}_t)(\omega)\, K .$$

Wenn wir noch beachten, daß $h_t\, E^{\nu}[E^{\nu}(g \mid \mathfrak{F}) \mid \mathfrak{F}_t] = E(hE^{\nu}(g \mid \mathfrak{F}) \mid \mathfrak{F}_t)$ für alle $t \in \mathbb{R}_+$ gilt, folgt die Behauptung mit $f = hE^{\nu}(g \mid \mathfrak{F})$. (Hier wurde wieder $\mathfrak{F}$ mit der σ-Unteralgebra $\{[0,\infty]\times F : F \in \mathfrak{F}\}$ von $\hat{\Sigma}$ identifiziert, so daß die oben auftretenden Funktionen nur Funktionen von $\omega \in \Omega$ sind).

Korollar: Ein durch $M_t = E(u \mid \mathfrak{F}_t)$ $(u \in L^1_E(P))$ bis auf eine Modifikation gegebenes Martingal besitzt eine Modifikation mit relativ-kompakten Pfaden. Ein Quasimartingal der Klasse (D) mit Werten in einem (RN)-Banachraum E besitzt stets eine Modifikation mit relativ-kompakten Pfaden.

Beweis: Wir beweisen das Korollar für ein Quasimartingal $Q = (Q_t)$ der Klasse (D). Die Voraussetzungen des Satzes 2.6 sind erfüllt, da E die Radon-Nikodym Eigenschaft besitzt. Für eine geignete Modifikation $Q' = (Q'_t)$ von Q gilt deshalb $Q'_t(\omega) \in N_t(\omega)\,K$ für alle $t \in \mathbb{R}_+$ und $\omega \in \Omega$, wobei $N = (N_t)$ die normale Modifikation des bis auf eine Modifikation gegebenen reellen Martingals $t \longrightarrow E(f \mid \mathfrak{F}_t)$ ist. Nach der Maximalungleichung für Martingale ist $\sup_{t \in \mathbb{R}_+} |M_t|$ fast sicher endlich, woraus die Behauptung folgt.

2.7: Als Nächstes wird gezeigt, wie E-wertige Quasimartingale als Bilder ℓ^1-wertiger Quasimartingale dargestellt werden können, wobei letztere wiederum als reelle Quasimartingale aufgefaßt werden. In §3,1 wurde ℓ^1 als ein Raum $L^1(P')$ definiert, mit einem Wahrscheinlichkeitsmaß P' auf $(\Omega', \mathfrak{F}') = (\mathbb{N}, \mathfrak{P}(\mathbb{N}))$. Mit Φ wurde der kanonische Isomorphismus zwischen $L^1(P \otimes P')$ und $L^1_{\ell^1}(P)$ bezeichnet (siehe §3,1.3). Zu der im Paragraphen 1 festgelegten stochastischen Basis $\mathcal{B} = (\Omega, \mathfrak{F}, P, (\mathfrak{F}_t), \mathbb{R}_+)$ definieren wir die stochastische Basis

$\mathcal{B}' := (\Omega \times \Omega', \mathfrak{F} \otimes \mathfrak{F}', (\mathfrak{F}_t \otimes \mathfrak{F}'), \mathbb{R}_+)$. Wie man sich leicht überlegt, ist die σ-Algebra Σ'_p der prävisiblen Mengen bezüglich $\mathcal{B}'$ gerade $\Sigma_p \otimes \mathfrak{F}'$. Wir definieren weiterhin die $\Sigma = \mathfrak{H} \otimes \mathfrak{F}$ und $\hat{\Sigma}$ entsprechenden σ-Algebren als $\Sigma' := \Sigma \otimes \mathfrak{F}'$ und $\hat{\Sigma}' := \hat{\Sigma} \otimes \mathfrak{F}'$. Es sei noch darauf hingewiesen, daß sich auch künftig stochastische Prozesse als Prozesse bezüglich $\mathcal{B}$ verstehen. Ausnahmen

werden besonders hervorgehoben.

2.8 Satz: Es sei $Q = (Q_t)$ ein Quasimartingal der Klasse (D) mit Werten in einem Banachraum E, derart daß μ_Q die Voraussetzungen von Satz 2.4 erfüllt. Dann existieren ein reelles Quasimartingal $X = (X_t)$ der Klasse (D) bezüglich der stochastischen Basis $\mathfrak{B}'$ und eine lineare Kontaktion ψ von ℓ^1 in E mit $Q_t = \psi \circ \phi(X_t)$ P-fast sicher für alle $t \in \mathbb{R}_+$.

Beweis: Die Bezeichnungen sind die gleichen wie in 2.3 und 2.4 mit ν anstelle von $|\mu_Q|$. Nach Satz 1.5 existieren eine Kontraktion ψ von ℓ^1 in E und ein Element $v \in L^1_{\ell^1}(P)$ mit $\psi \circ v = u$. Setze $\nu' := \nu \otimes P'$ und definiere das Element $g \in L^1(\nu')$ durch $g := \bar{\phi}^{-1}(v)$, wobei $\bar{\phi}$ der kanonische Isomorphismus zwischen $L^1(\nu')$ und $L^1_{\ell^1}(\nu)$ ist (siehe 1.3). Wir beachten, daß die Radon-Nikodym-Dichte $h' = d\nu'/d(P \otimes P') = d(\nu \otimes P')/d(P \otimes P')$ eine Funktion nur von $\omega \in \Omega$ ist und mit $h = d\nu/dP$ übereinstimmt. Insbesondere haben wir die Gleichheit (1)

$\phi(h'_t f) = h_t \bar{\phi}(f)$ für jedes bezüglich

$\mathfrak{F}_t \otimes \mathfrak{F}' = \{[0,\infty] \times F : F \in \mathfrak{F}_t \otimes \mathfrak{F}'\}$ -meßbare Element $f \in L^1(\nu')$, wobei h'_t durch $h'_t := E^{P \otimes P'}(h' \mid \mathfrak{F}_t \otimes \mathfrak{F}')$ für alle $t \in \mathbb{R}_+$ definiert ist. Weiterhin gilt offensichtlich für alle $t \in \mathbb{R}_+$

(2) $\bar{\phi}(E^{\nu'}(-\chi_{]t,\infty] \times \Omega} g \mid \mathfrak{F}_t \otimes \mathfrak{F}')) = E(-\chi_{]t,\infty] \times \Omega} v \mid \mathfrak{F}_t)$ und

(3) $\psi \circ E^{\nu}(-\chi_{]t,\infty] \times \Omega} v \mid \mathfrak{F}_t) = E^{\nu}(-\chi_{]t,\infty] \times \Omega} g \mid \mathfrak{F}_t \otimes \mathfrak{F}')$.

Wir setzen $X_t := h'_t E^{\nu'}(-\chi_{]t,\infty] \times \Omega} g \mid \mathfrak{F}_t \otimes \mathfrak{F}')$ für alle $t \in \mathbb{R}_+$. $X = (X_t)$ ist nach Lemma 2.5 ein reelles Quasimartingal der Klasse (D) bezüglich der stochastischen Basis $\mathfrak{B}'$. Nach (1), (2), (3) und Satz 2.4 gilt für alle $t \in \mathbb{R}_+$

$$\psi \circ \phi(X_t) = \psi \circ (h_t \bar{\phi}(E^{\nu'}(-\chi_{]t,\infty] \times \Omega} g \mid \mathfrak{F}_t \otimes \mathfrak{F}')))$$

$$= \psi \circ (h_t E^{\nu}(-\chi_{]t,\infty] \times \Omega} v \mid \mathfrak{F}_t)) = h_t E^{\nu}(-\chi_{]t,\infty] \times \Omega} (\psi \circ v) \mid \mathfrak{F}_t) =$$

$$= h_t E^{\nu}(-\chi_{]t,\infty] \times \Omega} u \mid \mathfrak{F}_t) = Q_t .$$

Das war aber zu beweisen.

Bemerkung: Sieht man sich die Konstruktion des Prozesses $X = (X_t)$ etwas genauer an, so kann sogar eine Aussage über die $L^1(P \otimes P')$-Norm der X_t gemacht werden. Sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Da u die Radon-Nikodym-Dichte von μ_Q bezüglich $|\mu_Q|$ ist, besitzt u eine Darstellung $u = \Sigma_i \lambda_i f_i \otimes x_i$ mit $\Sigma_i |\lambda_i| \|f_i\|_1 \|x_i\| \leq 1 + \varepsilon/|\mu_Q|(\bar{\mathbb{R}}_+ \times \Omega)$. Also gilt $\|v\|_1 \leq 1 + \varepsilon/|\mu_Q|(\bar{\mathbb{R}}_+ \times \Omega)$ und folglich $\|X_t\|_1 \leq |\mu_Q|(\bar{\mathbb{R}}_+ \times \Omega) + \varepsilon$ für alle $t \in \mathbb{R}_+$. Für alle $\varepsilon > 0$ kann also $X = (X_t)$ im vorigen Satz so gewählt werden, daß $|\mu_X|(\bar{\mathbb{R}}_+ \times \Omega) \leq |\mu_Q|(\bar{\mathbb{R}}_+ \times \Omega) + \varepsilon$ und $\|X_t\|_1 \leq |\mu_Q|(\bar{\mathbb{R}}_+ \times \Omega) + \varepsilon$ gilt für alle $t \in \mathbb{R}_+$.

3 Regularität und Zerlegungssätze für verallgemeinerte Martingale

Die Bezeichnungen in den Beweisen dieses Abschnittes sind die gleichen wie in 2.3 und 2.4 . Das Normfunktional auf dem Banachraum E wird mit p bezeichnet.

3.1 Satz: Es sei $Q = (Q_t)$ ein Quasimartingal der Klasse (D) mit Werten in dem (RN)-Banachraum E . Dann gilt:
(a) Es existiert eine normale Modifikation $\hat{Q} = (\hat{Q}_t)$ von Q .
(b) $Q_\infty = \lim_{t\to\infty} Q_t$ existiert in $L^1_E(P)$, und Q_∞ ist fast sicher der punktweise Limes $Q_\infty = \lim_{t\to\infty} \hat{Q}_t$.

Beweis: (a) Nach 2.8 existiert ein reelles Quasimartingal $X = (X_t)$ der Klasse (D) bezüglich der stochastischen Basis $\mathfrak{B}'$ mit $Q_t = \psi \circ \phi(X_t)$ P-fast sicher für alle $t \in \mathbb{R}_+$. Wir können $E = \ell^1$ annehmen. Das heißt aber $Q_t = \phi(X_t)$ und somit $Q(t,\omega) = X(t,\omega,.)$ für P-fast alle $\omega \in \Omega$ und alle $t \in \mathbb{R}_+$. Setzen $\hat{Q}_t(t,\omega) := \hat{X}(t,\omega,.)$, wobei $\hat{X} = (\hat{X}_t)$ die normale Modifikation von X ist. Nach Korollar 2.6 können wir annehmen, daß die Pfade von $\hat{Q}$ relativ-kompakt sind. Sei G der Unterraum von $\ell^\infty = (\ell^1)'$, welcher von der Menge $\{\chi_{\{i\}} : i=1,2,3,\ldots\}$ erzeugt

wird. Da $\hat{X}$ normal ist, sind die Pfade von $\hat{Q}$ rechtsseitig stetig und besitzen linksseitige Limiten für die Topologie $\sigma(\ell^1, G)$. Wegen der Relativ-Kompaktheit der Pfade von $\hat{Q}$ stimmt aber $\sigma(\ell^1, G)$ mit der Normtopologie für alle $\omega \in \Omega$ auf der Menge $\{\hat{Q}(t,\omega) : t \in \mathbb{R}_+\}$ überein.

(b) Da Φ eine Isometrie ist, folgt die Existenz von Q_∞ in $L^1_E(P)$ sofort aus der bekannten Tatsache, daß für das reelle Quasimartingal X der Klasse (D) $X_\infty = \lim_{t\to\infty} X_t$ in $L^1(P \otimes P')$ existiert. Der Beweis für die fast sichere Konvergenz verläuft völlig analog zum Beweis von Teil (a).

Korollar 1: Es sei $M = (M_t)$ ein gleichgradig integrierbares Martingal mit Werten in einem (RN)-Banachraum E. Dann konvergiert (M_t) fast sicher und in der $L^1_E(P)$-Norm gegen ein Element $M_\infty = \lim_{t\to\infty} M_t$.

Beweis: Man beachte, daß gleichgradige Integrierbarkeit und die Eigenschaft, von der Klasse (D) zu sein, bezüglich der schwachen Topologie auf E definiert wurden. Für gleichgradig integrierbare reelle Martingale ist aber wohlbekannt, daß diese von der Klasse (D) sind.

Korollar 2: $M = (M_t)$ sei ein normales Martingal mit Werten in dem Banachraum E. Es existiere ein $u \in L^1_E(P)$ mit $M_t = E(u \mid \mathfrak{F}_t)$ P-fast sicher für alle $t \in \mathbb{R}_+$. Dann konvergiert (M_t) fast sicher und in der $L^1_E(P)$-Norm gegen ein Element $M_\infty = \lim_{t\to\infty} M_t$.

Beweis: Wegen Satz 2.8 und des obigen Satzes kann ohne Einschränkung der Allgemeinheit $E = \ell^1$ angenommen werden. Da ℓ^1 die Radon-Nikodym-Eigenschaft besitzt, folgt Korollar 2 aus Korollar 1.

Korollar 3: Ein Martingal mit Werten in einem Banachraum E besitzt stets eine normale Modifikation.

Beweis: Für den Beweis kann man sich offensichtlich auf Martingale beschränken, die zu einer Zeit s $(s \in \mathbb{R}_+)$ gestoppt sind. Diese Martingale erfüllen aber die Voraussetzungen von Satz 2.8, man kann also wie im Beweis des vorigen Korollars $E = \ell^1$ annehmen. Somit ist das Korollar eine unmittelbare Folgerung aus dem obigen Satz.

Korollar 4: Ein Quasimartingal $Q = (Q_t)$ mit Werten in einem (RN)-Banachraum E besitzt stets eine normale Modifikation.

Beweis: Nach §1, Satz 2.7 ist poQ ein reelles Quasimartingal und besitzt deshalb eine normale Modifikation $X = (X_t)$. Setzen $T_n(\omega) = \inf \{t \in \mathbb{R}_+ : X(t,\omega) \geq n\} \wedge n$ für alle $\omega \in \Omega$. Da X normal ist, ist (T_n) eine isotone Folge von Stoppzeiten mit $\lim_n T_n = \infty$. Mit $Q^{(n)}$ bezeichnen wir für jedes n eine Modifikation des zur Zeit T_n gestoppten Quasimartingals Q. (Siehe §1, Definition 2.4). Offensichtlich ist das zur Zeit T_n gestoppte reelle Quasimartingal X^{T_n} von der Klasse (D) und damit auch $Q^{(n)}$ nach §1, Lemma 2.5. Es existiert also eine normale Modifikation $\hat{Q}^{(n)}$ für jedes n. Aus §1, Lemma 2.5 folgt, daß $\hat{Q}^{(n)}$ und $\hat{Q}^{(m)}$ für $m \geq n$ auf $[\![0, T_n]\!]$ fast sicher übereinstimmen. Also definiert $\hat{Q}(t,\omega) := \lim_n \hat{Q}^{(n)}(t,\omega)$ $((t,\omega) \in \mathbb{R}_+ \times \Omega)$ eine normale Modifikation von Q.

Bemerkungen: In Spezialfällen gehen die Korollare 1 und 2 auf F. Scalora [16] zurück. Die Korollare 3 und 4 stammen von J. Pellaumail ([15], Chap IV). Auf einzelne Fehler im genannten Kapitel der zitierten Arbeit wurde bereits im Paragraphen 1 hingewiesen.

Ein Phänomen, das auch bei den folgenden Resultaten dieses Abschnittes auftreten wird, verdeutlichen die Beweise der obigen Korollare: Immer, wenn sich Regularitätsaussagen über verallge-

meinerte Martingale machen lassen, kann man sich im wesentlichen auf den Fall $E = \ell^1$ und damit auf einen (RN)-Banachraum E zurückziehen. Der folgende Satz grenzt für E-wertige Martingale das Konvergenzverhalten im Falle eines (RN)-Banachraumes E von dem allgemeinen Fall ab. Er zeigt auch, daß die Klasse der fast sicher konvergenten Martingale durch Benutzen der schwachen Topologie nicht vergrößert werden kann.

3.2 Satz: Es sei $Q = (Q_t)$ ein normales Martingal mit Werten in einem Banachraum E. Betrachte die folgenden Aussagen:

(a) (Q_t) konvergiert fast sicher in der Normtopologie für $t \to \infty$.

(b) (Q_t) konvergiert fast sicher in der schwachen Topologie $\sigma(E,E')$ für $t \to \infty$.

(c) Q besitzt fast sicher schwach relativ-kompakte Pfade.

(d) Q besitzt fast sicher relativ-kompakte Pfade.

(e) Q besitzt fast sicher beschränkte Pfade.

Die Aussagen (a), (b), (c) und (d) sind äquivalent. (d) impliziert (e), und (e) ist äquivalent zu (d), falls E die Radon-Nikodym-Eigenschaft besitzt.

Beweis: Die Implikation (a) $\Rightarrow$ (b) ist offensichtlich. Wir beweisen (b) $\Rightarrow$ (c). Definieren die isotone Folge (T_n) von beschränkten Stoppzeiten durch $T_n(\omega) = \inf \{t \in \mathbb{R}_+ : \|Q(t,\omega)\| \geq n\} \wedge n$ für alle $\omega \in \Omega$. Es gilt $\lim_n T_n = \infty$ und $Q_t^{T_n} = E(Q_{T_n} | \mathfrak{F}_t)$ P-fast sicher für alle $t \in \mathbb{R}_+$. Nach Korollar 2.6 können wir also annehmen, daß für alle n die Pfade von Q^{T_n} relativ-kompakt sind. Sei nun $Q(\omega): t \longrightarrow Q(t,\omega)$ ein schwach konvergenter Pfad. Man definiere die Folge (s_n) durch $s_n = T_n(\omega)$ für alle n. Es gilt $\lim_n s_n = \infty$. Weiterhin existiert für jedes n eine kompakte Menge $K_n \subseteq E$ mit $\{Q(t,\omega) : 0 \leq t \leq s_n\} \subseteq K_n$. Um zu zeigen, daß die Menge $\{Q(t,\omega) : t \in \mathbb{R}_+\}$ schwach relativ-kompakt

ist,genügt es nach dem Satz von Eberlein zu zeigen,daß jede Folge von Elementen dieser Menge eine schwach konvergente Teilfolge besitzt. Sei also (t_k) eine Folge von Elementen von $\mathbb{R}_+$. Wir unterscheiden 2 Fälle: 1) Es existiert ein n mit $t_k \leq s_n$ für alle k. Dann ist die Folge $(Q(t_k,\omega))$ in der kompakten Menge K_n enthalten und besitzt folglich eine konvergente Teilfolge. 2) Für alle n existiert ein k mit $t_k > s_n$. Wegen $\lim_n s_n = \infty$ existiert eine Teilfolge (t_j) von (t_k) mit $\lim_j t_j = \infty$. Die Folge $(Q(t_j,\omega))$ ist dann schwach konvergent nach Voraussetzung. Damit ist (b)$\Rightarrow$(c) gezeigt. Wir beweisen nun (c)$\Rightarrow$(a). Wir können ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen,daß E separabel ist. Definieren die Folge (T_n) von Stoppzeiten durch $T_n(\omega) = \inf\{t \in \mathbb{R}_+ : \|Q(t,\omega)\| \geq n\}$ für alle $\omega \in \Omega$. Da Q nach (c) fast sicher beschränkte Pfade besitzt, gilt $P(\bigcup_n \{T_n = \infty\}) = 1$. Es genügt also (a) für jedes n für das zur Zeit T_n gestoppte Martingal Q^{T_n} zu zeigen. Nun ist Q^{T_n} ein gleichgradig integrierbares Martingal für jedes n, wir können also annehmen,daß Q ein gleichgradig integrierbares Martingal mit schwach relativ-kompakten Pfaden ist. Da E separabel ist,existiert also eine abzählbare Menge $U := \{x_n' : i=1,2,\ldots\} \subseteq E'$, so daß für alle $\omega \in \Omega$ die Topologie der punktweisen Konvergenz auf U und die Topologie $\sigma(E,E')$ auf $\{Q(t,\omega) : t \in \mathbb{R}_+\}$ übereinstimmen. Nach dem Konvergenzsatz für reelle Martingale konvergiert für alle n das Netz $\{x_n' \circ Q(t,\omega) : t \in \mathbb{R}_+\}$ für P-fast alle $\omega \in \Omega$. Folglich ist $\{Q(t,\omega) : t \in \mathbb{R}_+\}$ ein schwaches Cauchy-Netz für P-fast alle $\omega \in \Omega$ und damit wegen (c) schwach konvergent. Wir definieren die E-wertige Funktion u durch $u(\omega) = \sigma(E,E')\text{-}\lim_{t\to\infty} Q(t,\omega)$ für fast alle $\omega \in \Omega$. u ist schwach meßbar bezüglich $\mathfrak{F}$. Da Q als gleichgradig integrierbares Martingal die Voraussetzungen

des Lemmas 2.2 erfüllt, existiert die Fortsetzung $\bar{\mu}_1$ der dort definierten E-wertigen Mengenfunktion μ_1. $\bar{\mu}_1$ ist ein σ-additives P-absolut-stetiges Maß von beschränkter Variation. Setzen $f := d|\bar{\mu}_1|/dP$. Offensichtlich gilt für alle $F \in \mathfrak{F}$ und $x' \in E'$ $\int_F x'ou\, dP = x'o\bar{\mu}_1(F) \leq |\bar{\mu}_1|(F) = \int_F f\, dP$ und folglich $pou = \sup\{x'ou : x' \in E', \|x'\| \leq 1\} \leq f$. u ist also eine Bochner-integrierbare Funktion und es gilt $E(u \mid \mathfrak{F}_t) = Q_t$ für alle $t \in \mathbb{R}_+$, da Q ein gleichgradig integrierbares Martingal ist. Nach 3.1 Korollar 2 konvergiert also (Q_t) gegen u fast sicher in der Normtopologie für $t \to \infty$. Damit ist der Beweis für (c) $\Rightarrow$ (a) erbracht. Der Beweis der Implikation (a) $\Rightarrow$ (d) verläuft analog zum Beweis (b) $\Rightarrow$ (c). Da (d) offensichtlich (c) impliziert, ist der erste Teil der Behauptung vollständig bewiesen. Um den zweiten Teil zu beweisen, zeigen wir, daß im Falle eines (RN)-Banachraumes E aus (e) die Aussage (a) folgt. Wie im Beweis von (c) $\Rightarrow$ (a) können wir uns auf ein gleichgradig integrierbares Martingal Q beschränken. Für derartige Martingale folgt aber die Behauptung aus 3.1 Korollar 1.

Da für ein E-wertiges Martingal Q der reelle Prozeß poQ ein normbeschränktes Submartingal ist, ist nach der Maximalungleichung für reelle Submartingale die Aussage (d) des Satzes für alle Martingale erfüllt. Wir haben also

Korollar 1: Es sei $Q = (Q_t)$ ein normales Martingal mit Werten in einem (RN)-Banachraum E. Dann besitzt Q fast sicher kompakte Pfade, und der Limes $M_\infty = \lim_{t\to\infty} M_t$ existiert P-fast sicher.

Bemerkung: Die Konvergenzaussage im obigen Korollar geht auf Chatterji [2] zurück. Aus der zitierten Arbeit (Theorem 6) geht sogar hervor, daß die Gültigkeit dieser Konvergenzaussage für alle

E-wertigen Martingale äquivalent zur Radon-Nikodym-Eigenschaft von E ist. Die Aussagen (a) bis (e) des Satzes 3.2 sind also genau dann äquivalent für alle E-wertigen Martingale Q, wenn E die Radon-Nikodym-Eigenschaft besitzt.

Der folgende Satz behandelt den Fall von Quasimartingalen mit Werten in einem (RN)-Banachraum. Hervorzuheben ist auch hier die Äquivalenz der fast sicheren Konvergenz in der Normtopologie und in der schwachen Topologie, im Gegensatz zu den allgemeineren asymptotischen Martingalen, wo typischerweise fast sichere Konvergenz in der schwachen Topologie auftritt. Auf den Beweis wird verzichtet, da dieser mit ähnlichen Methoden erbracht werden kann, wie der Beweis von Satz 3.2.

3.3 Satz: Für jedes normale Quasimartingal $Q = (Q_t)$ mit Werten in einem (RN)-Banachraum E sind die Aussagen (a) bis (e) des Satzes 3.2 äquivalent.

Als nächstes kommen wir zu den Zerlegungen von Quasimartingalen. Wir beweisen zuerst das folgende

3.4 Lemma: Es sei $X = (X_t)$ ein reelles Quasimartingal der Klasse (D) bezüglich der stochastischen Basis $\mathcal{B}'$. ψ sei eine lineare Kontraktion von ℓ^1 in den (RN)-Banachraum E, und $Q = (Q_t)$ sei definiert durch $Q_t = \psi \circ \phi(X_t)$ für alle $t \in \mathbb{R}_+$. Mit X ist auch Q normal, und mit X ist auch Q prävisibel (sogar bezüglich der durch die Normtopologie erzeugten σ-Algebra).

Beweis: Der Beweis für die Normalität verläuft analog zum zweiten Teil des Beweises für die Existenz einer normalen Modifikation eines Quasimartingals der Klasse (D). Um zu zeigen, daß Q prävisibel ist, nehmen wir wieder ohne Einschränkung der Allgemeinheit $E = \ell^1$ und $Q_t = \phi(X_t)$ an. Wie im Beweis von Satz 3.1 wird G als der von der Menge $\{\chi_{\{i\}} : i=1,2,3,\ldots\}$ erzeugte

Unterraum von $\ell^\infty = (\ell^1)'$ definiert. Nach Satz 2.6 existieren ein positives, normales reelles Martingal $M = (M_t)$ und eine kreisförmige kompakte Teilmenge $K \subseteq E$ mit $Q(t,\omega) \in M(t,\omega)K$ für alle $(t,\omega) \in \mathbb{R}_+ \times \Omega$. Wir definieren die Folge (T_n) von Stoppzeiten mit $\lim_n T_n = \infty$ durch $T_n(\omega) = \inf\{t \in \mathbb{R}_+ : M(t,\omega) \geq n\}$ für alle $\omega \in \Omega$ und setzen $Q^{(n)} = \chi_{[\![0,T_n[\![} Q + \chi_{[\![T_n,\infty[\![} Q_{T_n-}$ für alle n. Q ist der punktweise Limes der Folge $(Q^{(n)})$. Wir brauchen also nur zeigen, daß $Q^{(n)}$ für jedes n prävisibel ist. Da $X^{(n)} := \chi_{[\![0,T_n[\![} X + \chi_{[\![T_n,\infty[\![} X_{T_n-}$ prävisibel ist, ist $Q^{(n)}$ prävisibel für die Topologie $\sigma(\ell^1,G)$. Nun gilt aber $Q^{(n)}(t,\omega) \in nK$ für alle $(t,\omega) \in \mathbb{R}_+ \times \Omega$, d.h. auf dem Wertebereich von $Q^{(n)}$ stimmen die Normtopologie und die Topologie $\sigma(\ell^1,G)$ überein.

3.5 Satz (Doob-Meyer-Zerlegung): Es sei $Q = (Q_t)$ ein normales Quasimartingal der Klasse (D) mit Werten in einem (RN)-Banachraum E. Dann besitzt Q eine eindeutige Zerlegung $Q = M + V$, wobei $M = (M_t)$ ein normales gleichgradig integrierbares Martingal mit $M_o = 0$ und $V = (V_t)$ ein prävisibler normaler Prozeß von integrabler Variation ist.

Beweis: Die Eindeutigkeit der Zerlegung folgt wie im Fall reeller Prozesse. Setzen $Q_t = \psi \circ \phi(X_t)$ für alle $t \in \mathbb{R}_+$ wie im Satz 2.8. Wir können annehmen, daß $X = (X_t)$ ein normales Quasimartingal der Klasse (D) bezüglich der stochastischen Basis $\mathfrak{B}'$ ist. Es sei $X = N + W$ die Doob-Meyer-Zerlegung von X, wobei N und W die von M und V geforderten Eigenschaften besitzen. (Siehe §2, Satz 2.7). Wir definieren $M = (M_t)$ und $V = (V_t)$ durch $M_t = \psi \circ \phi(N_t)$ und $V_t = \psi \circ \phi(W_t)$ für alle $t \in \mathbb{R}_+$. Nach Lemma 3.4 ist $Q = M + V$ die geforderte Zerlegung von Q.

Korollar 1: Jedes normale Quasimartingal mit Werten in einem (RN)-Banachraum E besitzt eine eindeutige Zerlegung $Q = M + V$ in ein lokales Martingal $M = (M_t)$ mit $M_0 = 0$ und einen prävisiblen normalen Prozeß $V = (V_t)$ von integrabler Variation.

Beweis: Der Beweis wird wie im Falle reeller Quasimartingale durch optionales Stoppen zu den Stoppzeiten $T_n(\omega) = \inf \{t \in \mathbb{R}_+ : \|Q(t,\omega)\| \geqslant n\}$ $(\omega \in \Omega)$ geführt.

Korollar 2: Es sei $V = (V_t)$ ein prävisibler normaler Prozeß von integrabler Variation mit Werten in einem (RN)-Banachraum E. Dann existiert ein prävisibler reeller Prozeß $W = (W_t)$ von integrabler Variation bezüglich der stochastischen Basis $\mathfrak{B}'$ mit $V_t = \psi \circ \phi(W_t)$ für alle $t \in \mathbb{R}_+$.

Beweis: Wir setzen $V_t = \psi \circ \phi(X_t)$ und $X = N + W$ wie im Beweis des Satzes. Wegen der Eindeutigkeit der Doob-Meyer-Zerlegung muß für alle $t \in \mathbb{R}_+$ $\psi \circ \phi(N_t) = 0$ gelten. Also gilt $V_t = \psi \circ \phi(W_t)$ für alle $t \in \mathbb{R}_+$.

Korollar 3: Es sei $V = (V_t)$ ein prävisibler normaler Prozeß von integrabler Variation mit Werten in einem (RN)-Banachverband E. Dann besitzt V eine Zerlegung $V = V' - V''$, wobei V' und V'' prävisible normale Prozesse von integrabler Variation mit positiven isotonen Pfaden sind.

Beweis: Wir schreiben $V_t = \psi \circ \phi(W_t)$ für alle $t \in \mathbb{R}_+$ wie in Korollar 2. Der reelle Prozeß $W = (W_t)$ läßt sich zerlegen in der Form $W = W' - W''$, wobei W' und W'' die geforderten Eigenschaften haben. Das Korollar folgt also, wenn wir zeigen können, daß die Kontraktion ψ von ℓ^1 in E positiv gewählt werden kann. Es genügt also zu zeigen, daß im Falle eines Banachverbandes E die Kontraktion ψ im Satz 1.5 positiv gewählt werden kann. Zu diesem Zweck genügt es im Beweis dieses Satzes eine

Darstellung $u = \sum_i \lambda_i f_i \otimes x_i$ von $u \in L_E^1(\mu)$ so zu finden, daß $\sum_i |\lambda_i| < \infty$, (f_i) eine Nullfolge in $L^1(\mu)$ und $x_i \in E_+$ mit $\|x_i\| = 1$ für alle i erfüllt ist. Daß dies möglich ist, folgt aber unmittelbar aus der Gleichheit

$\sum_i \lambda_i f_i \otimes x_i = \sum_i \lambda_i f_i \otimes x_i^+ - \sum_i \lambda_i f_i \otimes x_i^-$, wobei x_i^+ und x_i^- die Positiv- bzw. Negativteile von x_i $(i=1,2,3,\ldots)$ sind.

Korollar 4: Es sei Q ein normales Quasimartingal der Klasse (D) mit Werten in einem (RN)-Banachverband E. Dann existiert eine Zerlegung $Q = Q' - Q''$ von Q in zwei normale Supermartingale Q' und Q'' mit positiven Pfaden, die beide von der Klasse (D) sind.

Bemerkung: Wie im Fall reeller Prozesse heißt $Q = (Q_t)$ ein Supermartingal, wenn $E(Q_t \mid \mathfrak{F}_s) \leq Q_s$ für alle $t \geq s$ gilt.

Beweis: Es sei $Q = M + V$ die Doob-Meyer Zerlegung von Q. M ist gleichgradig integrierbar, also existiert nach Satz 3.1 der Limes $u = \lim_{t\to\infty} M_t$ in der $L_E^1(P)$-Norm, und es gilt $M_t = E(u \mid \mathfrak{F}_t)$ P-fast sicher für alle $t \in \mathbb{R}_+$. Wir zerlegen u in Positiv- und Negativteil gemäß $u = u^+ - u^-$. Sei $V = V' - V''$ zerlegt wie in Korollar 3 und setze $v = \lim_{t\to\infty}(V_t' + V_t'')$. Nach Satz 3.1 existieren normale Modifikationen M' und M'' der bis auf Modifikation gegebenen Martingale $t \longrightarrow E(u^+ + v \mid \mathfrak{F}_t)$ und $t \longrightarrow E(u^- + v \mid \mathfrak{F}_t)$. Mit $Q' = M' - V''$ und $Q'' = M'' - V'$ ist $Q = Q' - Q''$ die geforderte Zerlegung des Quasimartingals Q.

Korollar 5: Es sei $Q = (Q_t)$ ein normales Supermartingal der Klasse (D) mit Werten in dem (RN)-Banachverband E. Wenn die Pfade von Q positiv sind, dann existiert eine eindeutige Zerlegung $Q = M - V$ von Q in ein normales gleichgradig integrierbares Martingal mit positiven Pfaden und einen prävisiblen Prozeß $V = (V_t)$ mit positiven isotonen Pfaden und $V_0 = 0$.

Beweis: Es sei $Q = M' + V'$ die Doob-Meyer-Zerlegung von Q wie in Satz 3.3 . Setze $M := M' + V'_o$ und $V := -(V' - V'_o)$. wir müssen zeigen,daß M positive Pfade und V positive isotone Pfade besitzen. Wegen der Separabilität der Wertebereiche von Q , M und V genügt es zu zeigen,daß für jedes positive $x' \in E'_+$ die reellen Prozesse $x'oM$ und $x'oV$ die entsprechenden Eigenschaften haben. Wir können also von nun an anehmen,daß $E = \mathbb{R}$ gilt. Zunächst wird gezeigt,daß V positive isotone Pfade besitzt. Für das von $-Q$ erzeugte gemittelte Prämaß i_{-Q} (siehe §1,2) gilt offensichtlich $i_{-Q}(A) \geqslant 0$ für alle $A \in \mathcal{R}_p$ mit $A \subseteq]0,\infty[\times \Omega$, und folglich ist dessen σ-additive Fortsetzung auf Σ_p , welche wieder mit i_{-Q} bezeichnet wird,positiv auf der Menge $]0,\infty[\times \Omega$. Nach den Sätzen 2.3 und 2.4 des Paragraphen 2 gilt für $t \geqslant s$ und $F \in \mathfrak{F}_t$

$$\int_F (-V'_t + V'_s)\, dP = E(-\chi_{]s,t] \times F}(u,\omega)\, dV'_u(\omega))$$

$$= \int \pi_p(\chi_{]s,t] \times F})\, di_{-Q}$$

$$\geqslant 0 \quad ,$$

wobei man beachten muß,daß die prävisible Projektion $\pi_p(\chi_{]s,t] \times F})$ von $\chi_{]s,t] \times F}$ positiv ist und außerhalb des stochastischen Intervalls $]s,t] \times \Omega$ gleich Null ist. Also gilt $-V'_t \geqslant -V'_s$ P-fast sicher für $t \geqslant s$, und damit besitzt $-V'$ als normaler Prozeß isotone Pfade. Hieraus folgt aber,daß $V = -V' + V'_o$ positive isotone Pfade besitzt. Da die Pfade von Q positiv sind,müssen auch die Pfade von $M = Q + V$ positiv sein.

Bemerkungen: 1) Eine äquivalente Form des Korollars 1 wurde in [15] bewiesen.

2) Der Umfang der Klasse derjenigen Banachverbände,die die Radon-Nikodym-Eigenschaft besitzen,läßt sich durch die folgende Überlegung einschränken: Es ist wohlbekannt,daß der Raum c_o der reellen Nullfolgen die Radon-Nikodym-Eigenschaft nicht besitzt. (Es

lassen sich zum Beispiel Martingale mit Werten in c_o finden,die gleichgradig integrierbar sind,aber weder den Normkonvergenzsatz noch den Satz von der fast sicheren Konvergenz erfüllen. (Siehe z.Bsp. [12]). Nach Satz 3.1 kann also c_o nicht die Radon-Nikodym-Eigenschaft besitzen. Einen direkten Beweis findet man in [9]). Damit kann ein (RN)-Banachverband E nicht einen zu c_o isomorphen Unterraum enthalten. Dies charakterisiert aber gerade KB-Räume,d.h. Banachverbände,die unter der Auswertungsabbildung ein Band in ihrem Bidual sind.(Siehe [17]). Es gibt allerdings KB-Räume,die die Radon-Nikodym-Eigenschaft nicht besitzen. Als Beispiel sei der Raum $L^1(\mu)$ für ein nicht rein atomares Maß μ angeführt.(Siehe [2]).

3) Auch die übrigen klassischen Zerlegungssätze für reelle Quasimartingale lassen sich mit den in diesem Abschnitt benutzten Methoden verallgemeinern. Darunter fällt z.Bsp. der in [12] (Proposition 2') angegebene Rieszsche Zerlegungssatz,der besagt,daß jedes normale Quasimartingal Q mit Werten in einem (RN)-Banachraum die Summe $Q = M + P$ eines normalen Martingals M und eines Quasipotentials P ist.(Ein <u>Quasipotential</u> $P = (P_t)$ ist ein Quasimartingal,das $\lim_{t\to\infty} P_t = 0$ in der $L^1_E(P)$-Norm erfüllt). Man beachte,daß man,wie bei der Doob-Meyer Zerlegung,auch in diesem Fall eine Aussage für Supermartingale mit Werten in einem (RN)-Banachverband erhält. Analog zum Fall reeller Supermartingale läßt sich nämlich ein Supermartingal mit Werten in einem (RN)-Banachverband in die Summe eines Martingals und eines Potentials zerlegen. (Ein <u>Potential</u> ist ein Quasipotential,das zudem ein Supermartingal mit positiven Pfaden ist).

Ein weiteres Beispiel ist die Zerlegung von Semimartingalen in einen stetigen und einen rein unstetigen Anteil . Dieses Resultat kann auf die folgende Weise formuliert werden : Es sei X ein

Semimartingal mit Werten in einem (RN)-Banachraum E. Dann existiert eine Zerlegung $X = X^c + X^d$, wobei X^c ein lokales Martingal mit stetigen Pfaden ist, welches durch die folgende Bedingung eindeutig bestimmt ist: Es gilt $x'oX^c = (x'oX)^c$ für alle $x' \in E'$, wobei $(x'oX)^c$ der stetige Anteil des reellen Semimartingals $x'oX$ (siehe §2, Definition 4.9) ist.
Auch dieses Resultat kann durch Anwendung der Sätze 2.8 und 2.6 direkt auf das entsprechende Resultat für reelle Semimartingale zurückgeführt werden. Eine präzisere Variante für Hilbertraumwertige Semimartingale wird im Paragraphen 4 angegeben.

Der für das weitere wichtigste Zerlegungssatz dieses Abschnittes ist der Satz über die lokale Zerlegbarkeit eines Semimartingals mit Werten in einem (RN)-Banachraum in die Summe eines quadratisch integrierbaren Martingals und eines Prozesses von integrabler Variation. Dieser Satz spielt eine fundamentale Rolle bei der stochastischen Integration reeller Prozesse. (Vergleiche §2,4). Das Fehlen eines derartigen Zerlegungssatzes verhinderte es bis jetzt, das stochastische Integral bezüglich Prozessen mit Werten in einem Hilbertraum in einer befriedigenden Allgemeinheit zu definieren. Das folgende Lemma sichert zunächst die gewünschte Zerlegung für normbeschränkte Supermartingale mit Werten in dem Banachverband ℓ^1.

3.6 Lemma: Es sei $Q = (Q_t)$ ein normales Supermartingal mit Werten in ℓ^1, welches $\sup\{\|Q(t,\omega)\| : (t,\omega) \in \mathbb{R}_+ \times \Omega\} < \infty$ erfüllt. Dann existiert eine Zerlegung $Q = M + V$, wobei $M = (M_t)$ ein normales quadratisch integrierbares Martingal und V ein Prozeß von integrabler Variation ist.

Beweis: Nach Satz 3.1 existiert $u = \lim_{t\to\infty} M_t$ und erfüllt offensichtlich $\sup\{\|u(\omega)\| : \omega \in \Omega\} < \infty$. Es sei $U = (U_t)$ die

nach Satz 3.1 existierende normale Modifikation des bis auf eine Modifikation gegebenen Martingals $t \longrightarrow E(u \mid \mathfrak{F}_t)$. Man prüft ohne Schwierigkeit nach, daß $Q - U$ ein Potential ist. In der Tat ist $Q = U + (Q-U)$ die Riesz-Zerlegung von Q. Da das Supremum $\sup \{\|U(t,\omega)\| : (t,\omega) \in \mathbb{R}_+ \times \Omega\}$ endlich ist, ist U quadratisch integrierbar, und erfüllt $Q - U$ die Voraussetzungen des Lemmas. Wir können also für den Rest des Beweises annehmen, daß Q ein Potential ist. Sei $Q = M - V$ zerlegt wie in Korollar 5 zu Satz 3.4. Man beachte, daß die Pfade von M positiv sind und daß damit $M_t \geqslant 0$ für alle $t \in \mathbb{R}_+$ gilt. Damit gilt aber $poM_t = eoM_t$, wobei p das Normfunktional auf ℓ^1 ist und e dasjenige Element von $\ell^\infty = (\ell^1)'$, welches der konstanten Folge (1) entspricht. Um zu zeigen, daß M quadratisch integrierbar ist, können wir also annehmen, daß Q, M und V reelle Prozesse sind. Für diesen Fall ist es aber wohlbekannt, daß die Zerlegung $Q = M - V$ ein quadratisch integrierbares Martingal M liefert. (Siehe [7], Proposition 12.1). Damit ist das Lemma bewiesen.

3.7 Satz: Es sei $Q = (Q_t)$ ein normales Quasimartingal der Klasse (D) mit Werten in einem (RN)-Banachraum E. Dann existiert eine isotone Folge (T_n) von Stoppzeiten mit $\lim_n T_n = \infty$, derart daß für alle n das zur Zeit T_n gestoppte Quasimartingal $Q^{(n)} := Q^{T_n}$ in die Summe eines quadratisch integrierbaren normalen Martingals und eines Prozesses von integrabler Variation zerlegt werden kann.

Beweis: Nach Satz 2.8 können wir annehmen, daß Q seine Werte in ℓ^1 annimmt. Also besitzt Q nach 3.5 Korollar 4 eine Zerlegung $Q = Q' - Q''$ in zwei normale Supermartingale Q' und Q'' mit positiven Pfaden. Definieren die Folge (T_n) von Stoppzeiten durch $T_n(\omega) = \{t \in \mathbb{R}_+ : \|Q'(t,\omega)\| \vee \|Q''(t,\omega)\| \geqslant n\}$ für alle $\omega \in \Omega$.

Wegen der Normalität von Q' bzw. Q'' gilt $\lim_n T_n = \infty$. Wir zeigen, daß für jedes n die zur Zeit T_n gestoppten Prozesse Q'^{T_n} bzw. Q''^{T_n} die geforderte Zerlegungseigenschaft haben. Für festes n definieren wir den Prozeß X durch $X := Q'^{T_n} - \chi_{[\![T_n,\infty[\![}\, Q'_{T_n} \cdot \chi_{[\![T_n,\infty[\![}\, Q'_{T_n}$ ist ein Prozeß von integrabler Variation und, da Q'_{T_n} positiv ist, ist X ein Supermartingal der Klasse (D). Weiterhin gilt $\sup\{|X(t,\omega)| : (t,\omega) \in \mathbb{R}_+ \times \Omega\} \leq n$. X kann also in $X = M + V$ wie in Lemma 3.6 zerlegt werden. Damit ist aber $Q'^{T_n} = M + (V + \chi_{[\![T_n,\infty[\![}\, Q'_{T_n})$ die geforderte Zerlegung von Q'^{T_n}. Der Beweis für den Prozeß Q''^{T_n} verläuft analog.

Korollar: Es sei $X = (X_t)$ ein Semimartingal mit Werten in einem (RN)-Banachraum E. Dann existiert eine isotone Folge (S_n) von Stoppzeiten mit $\lim_n S_n = \infty$, derart daß für jedes n der Prozeß $\chi_{[\![0,S_n[\![}\, X$ zerlegbar ist in die Summe eines quadratisch integrierbaren normalen Martingals und eines Prozesses von integrabler Variation.

Beweis: Es existiert eine isotone Folge (T_k) von Stoppzeiten mit $\lim_k T_k = \infty$ und $T_k \leq k$ für alle k, derart daß für jedes k der Prozeß $\chi_{[\![0,T_k[\![}\, X$ ein Quasimartingal der Klasse (D) ist. Wir konstruieren eine Folge (S_n) von Stoppzeiten mit den folgenden Eigenschaften:

(i) $S_n \leq T_n$ für alle n.

(ii) $P(\{S_n < T_{n-1}\}) \leq 2^{-n}$ für alle n.

(iii) Für jedes n ist $\chi_{[\![0,S_n[\![}\, X$ zerlegbar in die Summe eines quadratisch integrierbaren normalen Martingals und eines Prozesses von integrabler Variation.

Für festes k ist $\bigcap_n \{S_n < T_k\}$ eine P-Nullmenge, und damit ist $\{\omega \in \Omega : \lim_n S_n(\omega) < \infty\} = \bigcup_k \bigcap_n \{\omega \in \Omega : S_n(\omega) < T_k(\omega)\}$ eine P-Nullmenge, d.h. es gilt $\lim_n S_n = \infty$ P-fast sicher. (S_n) ist

dann die gesuchte Folge. Die Folge (S_n) wird iterativ konstruiert: Es sei S_n mit den geforderten Eigenschaften schon gefunden. Dann ist $\chi_{\llbracket S_n, T_{n+1} \rrbracket} X =: Q$ ein Quasimartingal der Klasse (D). Nach dem obigen Satz existiert also eine isotone Folge (T_i') von Stoppzeiten mit $\lim_i T_i' = \infty$, derart daß $Q^{T_i'}$ in ein quadratisch integrierbares Martingal und einen Prozeß von integrabler Variation zerlegbar ist. Man kann dabei offensichtlich $T_1' \geq S_n$ voraussetzen. Da $T_n \leq n$ gilt, existiert ein j mit $P(\{T_j' < T_n\}) \leq 2^{-n-1}$. Setzen $S_{n+1} = T_j' \wedge T_{n+1} \cdot S_{n+1}$ hat offensichtlich die Eigenschaften (i) - (iii).

§4 Stochastische Integration bezüglich Hilbertraum-wertiger Semimartingale und die allgemeine Itô-Formel

Ebenso wie in §3 legen wir für diesen Paragraphen die stochastischen Basen $\mathcal{B}$ und $\mathcal{B}'$ ein für allemal fest.

4.1 Stochastische Integration bezüglich Banachraum-wertiger Prozesse: Es seien E, F und G Banachräume, I ein Maß auf einer σ-Algebra Σ mit Werten in E und $B : E \times F \longrightarrow G$ eine stetige bilineare Abbildung. Das Integral $\int Z\, dI$ für eine I-integrierbare F-wertige Funktion Z wird stets im Sinne von [1] verstanden. Wir definieren außer der Semivariation von I, die sich auf reelle Integranden bezieht, eine von B abhängige Semivariation durch $\operatorname{svar}_B(I,A) := \sup \|\Sigma_i\, B(I(A_i), y_i)\| = \sup \|\int \Sigma_i\, \chi_{A_i}\, y_i\, dI\|$ für alle $A \in \Sigma$, wobei das Supremum über alle endlichen Folgen (A_i) von disjunkten Teilmengen $A_i \in \Sigma$ mit $A_i \subseteq A$ und (y_i) von Elementen $y_i \in F$ mit $\|y_i\| \leq 1$ genommen wird. Man beachte, daß die Semivariation $\operatorname{svar}(I,.)$ eines E-wertigen Maßes stets endlich ist. Ob dies allgemein für $\operatorname{svar}_B(I,.)$ zutrifft, scheint eine offene Frage zu sein.

Man sagt, daß I die (B)-Eigenschaft bezüglich F und B besitze, wenn ein reelles Maß μ auf Σ existiert mit $\mu(A) \longrightarrow 0$ genau dann, wenn $\operatorname{svar}_B(I,A) \longrightarrow 0$ gilt. (Siehe [1], 4 Definition 2, wo diese Eigenschaft als $(*)$-property bezeichnet wird). Die (B)-Eigenschaft bezüglich B und F garantiert offensichtlich die Endlichkeit von $\operatorname{svar}_B(I,.)$. Es sei an die wohlbekannte Tatsache erinnert, daß für reelle Maße I ebenso wie im Falle $F = \mathbb{R}$ die (B)-Eigenschaft stets erfüllt ist. Insbesondere folgt aus der (B)-Eigenschaft von I bezüglich F und B, daß jede beschränkte, schwach I-meßbare Funktion Z mit Werten in einem separablen Teilraum von F I-integrierbar ist. (Siehe [1], Theorem 3).

Normalerweise betrachtet man den Spezialfall $F = \mathfrak{L}(E,G)$ mit der kanonischen bilinearen Abbildung B von $Ex\mathfrak{L}(E,G)$ in G . In diesem Fall wird B nicht gesondert angegeben werden.

Es sei nun $Q = (Q_t)$ ein E-wertiges normales Quasimartingal. Das von Q erzeugte Prämaß I_Q auf dem Ring $\mathfrak{R}_p$ und das von Q erzeugte gemittelte Prämaß i_Q sind wie in §1,2 definiert.

1.1 Definition: Ein Quasimartingal Q heißt summierbar, wenn sich I_Q zu einem σ-additiven Maß mit Werten in $L_E^1(P)$ auf die σ-Algebra Σ_p der prävisiblen Mengen fortsetzen läßt. Diese Fortsetzung ist eindeutig bestimmt, wird wiederum mit I_Q bezeichnet und das von Q erzeugte stochastische Maß genannt.

Bemerkung: 1) Die obige Bedingung für Summierbarkeit ist restriktiver als die entsprechende Bedingung im Fall reeller Quasimartingale (§2 Definition 1.1). §2 Satz 1.3 garantiert jedoch, daß für $E = \mathbb{R}$ beide Definitionen übereinstimmen.

2) Falls Q summierbar ist, besitzt auch i_Q eine σ-additive Fortsetzung auf Σ_p, die wiederum mit i_Q bezeichnet und das von Q erzeugte gemittelte stochastische Maß genannt wird. i_Q ist stets von beschränkter Variation, da Q ein Quasimartingal ist.

1.2 Definition: Es sei Q ein summierbares Quasimartingal mit Werten in einem Banachraum E . Ferner seien F ein Banachraum, G ein (RN)-Banachraum und $B : ExF \longrightarrow G$ eine stetige bilineare Abbildung. Die induzierte Abbildung von $L_E^1(P)xF$ in $L_G^1(P)$ werde wieder mit B bezeichnet. Ein stochastischer Prozeß Z mit Werten in F heißt integrierbar bezüglich Q , wenn die folgenden drei Bedingungen erfüllt sind:

(a) Z ist prävisibel und nimmt seine Werte in einem separablen Unterraum von F an.

(b) Z ist integrierbar bezüglich I_Q (im Sinne von [1]).

(c) Z ist Bochner-integrierbar bezüglich der Variation $\mathrm{var}(i_Q,.)$ des von Q erzeugten gemittelten stochastischen Maßes i_Q .

Bemerkung: 1) Die Meßbarkeitsbedingung in (a) wird bezüglich der schwachen Topologie auf F verstanden.(Siehe §1,1). Wegen der Separabilität des Wertebereichs ist dies jedoch äquivalent dazu,daß Z prävisibel bezüglich der Normtopologie ist.

2) Bedingung (a) ist nicht notwendig,um das stochastische Integral bezüglich summierbarer Quasimartingale zu definieren. Sie wird sich jedoch für die Definition des lokalen Integrals als sehr bequem erweisen. Es sei darauf hingewiesen,daß (a)$\Rightarrow$(c) gilt, falls Z beschränkt ist. Wenn darüberhinaus I_Q die (B)-Bedingung erfüllt,dann impliziert (a) sogar (b) und (c) . Allgemein kann auf (c) verzichtet werden,wenn Q ein Martingal ist,da in diesem Fall $i_Q = 0$ gilt.

1.3 Satz: Seien Q , E , F , G und B wie in 1.2 , und sei Z integrierbar bezüglich Q . Dann definiert die Abbildung

$$t \longrightarrow \int \chi_{[\![0,t]\!]}\, Z\, dI_Q$$

bis auf eine Modifikation ein Quasimartingal mit Werten in G .

Beweis: Sei $X = (X_t)$ ein stochastischer Prozeß,der P-fast sicher für alle $t \in \mathbb{R}_+$ die Gleichung $X_t = \int_{[\![0,t]\!]} Z\, dI_Q$ erfüllt. Wir müssen zeigen,daß X ein Quasimartingal ist. Dazu benutzen wir §1,Satz 2.2 . Daß X_t $\mathfrak{F}_t$-meßbar ist für alle t, ist klar. Aus der σ-Additivität von I_Q folgt $\lim_{s \searrow t} X_s = X_t$ in der $L^1_G(P)$-Norm. Wegen $i_X = Z\, di_Q$ folgt die Beschränktheit der Variation $\mathrm{var}(i_X,.)$ unmittelbar aus 1.2 (c) . Also ist X ein Quasimartingal.

1.4 Definition: Seien Q , E , F , G , B und Z wie in Satz 1.3 . Nach §3,Satz 3.1 existiert eine normale Modifikation $X = (X_t)$ [illegible] auf eine Modifikation gegebenenen Quasimartingals

$t \longrightarrow \int \chi_{[\![0,t]\!]}\, Z\, dI_Q$. Diese Modifikation ist eindeutig bestimmt. Wir schreiben $\int Z\, dQ = (\int_0^t Z_s\, dQ_s)$ anstelle von $X = (X_t)$ und bezeichnen den Prozeß $\int Z\, dQ$ als das stochastische Integral von Z bezüglich Q.

Durch den folgenden Satz wird die Lokalisierung des stochastischen Integrals vorbereitet.

1.5 Satz: Es seien Q und Q' summierbare Quasimartingale mit Werten in E, F, G und B wie in 1.2. Weiterhin sei Z ein F-wertiger, Q'-integrierbarer beschränkter Prozeß, und es gelte $Q = \chi_{[\![0,T[\![} Q = \chi_{[\![0,T[\![} Q'$ für eine Stoppzeit T. Dann ist Z integrierbar bezüglich Q, und es gilt die Gleichheit

$$\chi_{[\![0,T[\![} \left[\int Z\, dQ - \int Z\, dQ'\right] = 0 .$$

Beweis: Wir können annehmen, daß Q' zur Zeit T gestoppt ist, daß also $Q' - Q = Q'_T\, \chi_{[\![T,\infty[\![} =: V$ gilt. Q'_T ist ein Element von $L^1_E(P)$, also ist V ein Prozeß von integrabler Variation der einfachsten Bauart, und aus der Beschränktheit von Z zusammen mit 1.2 (a) folgt unmittelbar, daß Z integrierbar bezüglich V mit dem stochastischen Integral $\int Z\, dV = \chi_{[\![T,\infty[\![}\, B(Q'_T, Z_T)$ ist. Damit ist Z auch integrierbar bezüglich Q mit dem stochastischen Integral $\int Z\, dQ = \int Z\, dQ' - \int Z\, dV$. Da $\int Z\, dV$ auf dem stochastischen Intervall $[\![0,T[\![$ gleich Null ist, folgt aus der letzten Gleichung die im Satz behauptete Gleichheit.

1.6 Definition (Lokale Integration): (a) Ein stochastischer Prozeß heißt lokal beschränkt, wenn eine isotone Folge (T_n) von Stoppzeiten mit $\lim_n T_n = \infty$ existiert, so daß die zur Zeit T_n gestoppten Prozesse für jedes n beschränkt sind.

(b) Seien E, F, G und B wie in 1.2 und X ein stochastischer Prozeß mit Werten in E. Ein F-wertiger stochastischer Prozeß Z heißt lokal integrierbar bezüglich X, wenn eine isotone Folge

(T_n) von Stoppzeiten mit $\lim_n T_n = \infty$ existiert, derart daß für jedes n die folgenden beiden Bedingungen erfüllt sind:
(a) $X^{(n)} := \chi_{[\![0,T_n[\![} X$ ist ein summierbares Quasimartingal
(b) $\chi_{[\![0,T_n]\!]} Z$ ist beschränkt und integrierbar bezüglich $X^{(n)}$.

Für jedes n ist $\int Z\, dX^{(n)}$ ein wohldefiniertes Quasimartingal mit Werten in G, und nach Satz 1.5 ist für alle m und n die Gleichheit $\chi_{[\![0,T_n[\![} [\int Z\, dX^{(n)} - \int Z\, dX^{(n+m)}] = 0$ erfüllt. Wir setzen $[\int Z\, dX](t,\omega) := \lim_n [\int Z\, dX^{(n)}](t,\omega)$ für alle $(t,\omega) \in \mathbb{R}_+ \times \Omega$. $\int Z\, dX$ ist ein wohldefinierter stochastischer Prozeß mit Werten in G, den wir als <u>das stochastische Integral von Z bezüglich X</u> bezeichnen. Daß $\int Z\, dX$ unabhängig von der Wahl der Folge (T_n) definiert ist, sieht man wieder mit Hilfe von Satz 1.5.

Wir schreiben $\int Z\, dX = (\int_{[0,t]} Z_s\, dX_s)$ und bezeichnen mit $\int_{]r,t]} Z_s\, dX_s$ die Zufallsvariable $\int_{[0,t]} Z_s\, dX_s - \int_{[0,r]} Z_s\, dX_s$. Für den Spezialfall $r=0$ gilt also $\int_{]0,t]} Z_s\, dX_s = \int_{[0,t]} Z_s\, dX_s - B(X_0, Z_0)$.

Aus der Definition 1.2 folgt, daß integrierbare Prozesse nicht notwendigerweise lokal beschränkt sind. Folglich braucht ein bezüglich Q integrierbarer Prozeß Z nicht lokal integrierbar bezüglich Q sein. Wenn jedoch Z darüberhinaus lokal beschränkt ist, dann ist Z integrierbar und lokal integrierbar bezüglich Q, und die stochastischen Integrale stimmen nach Satz 1.5 überein.

<u>4.2 Prozesse von integrabler Variation</u>:

<u>2.1 Satz</u>: Es sei $V = (V_t)$ ein normaler Prozeß von integrabler Variation mit Werten in einem (RN)-Banachraum E. Dann ist V summierbar, und I_V ist ein Maß auf Σ_p von beschränkter Variation mit Werten in $L^1_E(P)$.

<u>Beweis</u>: Wir definieren auf dem von den Mengen der Form $]s,t] \times F$ und $\{0\} \times F$, $s \le t \in \mathbb{R}_+$, $F \in \mathfrak{S}$ erzeugten Mengenring eine E-wertige additive Mengenfunktion μ^0_V durch $\mu^0_V(\{0\} \times F) = \int_F V_0\, dP$ und

$\mu_V^o(]s,t] \times F) = \int_F (V_t - V_s)\, dP$. Aus der Definition eines Prozesses von integrabler Variation folgt sofort, daß μ_V^o von beschränkter Variation ist. Weiterhin folgt aus §2, Satz 2.3, daß μ_V^o schwach σ-additiv ist. Also besitzt μ_V^o nach §3, Lemma 2.1 eine eindeutige Fortsetzung μ_V auf $\Sigma = \mathcal{B} \otimes \mathcal{S}$. Aus §1, Lemma 2.1 folgt $\|I_V(]s,t] \times F)\|_1 = \|\chi_F(V_t - V_s)\|_1 \leq \mathrm{var}(\mu_V,]s,t] \times F)$ für alle $s \leq t$ und $F \in \mathcal{S}$. Folglich gilt $\|I_V(A)\|_1 \leq \mathrm{var}(\mu_V, A)$ für alle $A \in \Sigma$, und da $\mathrm{var}(\mu_V, .)$ σ-additiv und beschränkt ist, hat I_V eine σ-additive Fortsetzung auf $\Sigma_p \subseteq \Sigma$ zu einem Maß von beschränkter Variation mit Werten in $L_E^1(P)$. Das war aber zu beweisen.

Korollar: Es seien V wie im obigen Satz, F ein Banachraum, G ein (RN)-Banachraum und $B : E \times F \longrightarrow G$ eine stetige bilineare Abbildung. Dann ist jeder beschränkte prävisible Prozeß Z mit Werten in einem separablen Unterraum von F integrierbar bezüglich V.

Beweis: Bedingung (a) von Definition 1.2 ist nach Voraussetzung erfüllt. Aus dem obigen Beweis sieht man, daß $\mathrm{var}(I_V, .) \leq \mathrm{var}(\mu_V, .)$ gilt. Weiterhin ist die Einschränkung von μ_V auf Σ_p gerade gleich i_V. Da Z nach Voraussetzung Bochner-integrierbar bezüglich $\mathrm{var}(\mu_V, .)$ ist, sind auch die Bedingungen (b) und (c) von 1.2 erfüllt.

2.2 Lemma: Es sei $\mathcal{SV}(E)$ der Vektorraum der normalen Prozesse integrabler Variation mit Werten in E. $\mathcal{SV}(E)$ ist ein normierter Raum unter $\|V\| := \sup \{\|V_o\|_1 + \sum_i \|V_{t_{i+1}} - V_{t_i}\|_1 : t_1 \leq t_2 \leq \ldots \leq t_n\}$. Für das wie im Beweis von Satz 2.1 definierte zu V assoziierte Maß μ_V gilt $\mathrm{var}(\mu_V, \mathbb{R}_+ \times \Omega) = \|V\|$.

Beweis: Da die durch $V \longrightarrow \mu_V$ für alle $V \in \mathcal{SV}(E)$ definierte Abbildung offensichtlich linear ist, genügt es die letzte Aussage des Lemmas zu beweisen. Daß $\mathrm{var}(\mu_V, \mathbb{R}_+ \times \Omega) \leq \|V\|$ gilt, folgt unmittelbar aus der Definition von μ_V. Wegen der Additivität von

$\mathrm{var}(\mu_V,.)$ folgt aus $\|V_t - V_s\|_1 \leq \mathrm{var}(\mu_V,]s,t] \times \Omega)$ für alle $s \leq t$ auch die umgekehrte Ungleichung $\|V\| \leq \mathrm{var}(\mu_V, \mathbb{R}_+ \times \Omega)$.

Wir wollen nun das überraschende Resultat beweisen, daß die Prozesse $V \in \mathcal{SV}(E)$, welche ihre Werte in einem endlichdimensionalen Unterraum von E annehmen, dicht liegen in $\mathcal{SV}(E)$, falls E die Radon-Nikodym-Eigenschaft besitzt. Dazu muß zunächst, analog zum Fall reeller Prozesse, eine eineindeutige lineare Korrespondenz zwischen V und μ_V hergestellt werden. (Vergleiche dazu den in §3 abgeklärten prävisiblen Fall).

2.3 Satz: Es seien E ein (RN)-Banachraum, μ ein E-wertiges Maß von beschränkter Variation auf $\Sigma = \mathcal{B} \otimes \mathcal{F}$ und ν ein positives reelles Maß auf Σ. Wir betrachten die σ-Unteralgebra $\mathcal{F} = \{[0,\infty[\times F : F \in \mathcal{F}\}$ von Σ und setzen voraus:

(a) μ ist ν-absolut-stetig, und $\mathrm{Res}_{\mathcal{F}} \nu$ ist P-absolut-stetig.

(b) Es gilt $\int Z \, d\mu = \int \pi_w Z \, d\mu$ für alle beschränkte, Σ-meßbare reelle Prozesse Z, wobei π_w die optionale Projektion ist.

Definiere u als die Radon-Nikodym-Dichte von μ bezüglich ν, h als die Radon-Nikodym-Dichte von $\mathrm{Res}_{\mathcal{F}} \nu$ bezüglich P und für jedes $t \in \mathbb{R}_+$ h_t durch $h_t = E(h \mid \mathcal{F}_t)$. Dann besitzt der durch $V_t = h_t \, E^{\nu}(\chi_{[0,t] \times \Omega} u \mid \mathcal{F})$ für alle $t \in \mathbb{R}_+$ bis auf eine Modifikation definierte Prozeß eine normale Modifikation $V = (V_t) \in \mathcal{SV}(E)$. Darüberhinaus gilt $\mu_V = \mu$ für das zu V (im Sinne von 2.2) assoziierte Maß μ_V.

Korollar: Ist E ein (RN)-Banachraum, so ist $\mathcal{SV}(E)$ ein Banachraum.

Bemerkungen: 1) Die optionale Projektion π_w wird auch als "well measurable projection" bezeichnet. (Siehe [7], Theorem 7.15).

2) (b) bedeutet, daß μ mit der optionalen Projektion vertauschbar d.h. die optionale Fortsetzung eines Maßes auf der σ-Algebra Σ_w der optionalen Mengen und damit insbesondere durch seine Werte

auf Σ_w eindeutig bestimmt ist.

Beweis: Wir müssen uns nur überlegen, daß der im Satz bis auf eine Modifikation definierte Prozeß ein Prozeß integrabler Variation ist. Nach §3, Satz 3.1 existiert dann eine normale Modifikation mit Werten in einem separablen Teilraum von E. Damit kann durch Betrachten der reellen Maße $x'\circ\mu$ und der reellen Prozesse $x'\circ V$ $(x' \in E')$ die Diskussion auf den Fall reeller Prozesse zurückgeführt werden. Der Satz folgt dann unmittelbar aus §2, Satz 2.3 und [7], Theorem 8.4. Wir müssen also zeigen, daß (2) und (3) von §1,2 erfüllt sind, und daß für jedes $t \in \mathbb{R}_+$ V_t $\mathfrak{F}_t$-meßbar ist. Seien $F \in \mathfrak{F}$ und $s \leq t \in \mathbb{R}_+$. Dann gilt

$$\|\int_F V_t - V_s \, dP\| = \|\int_F E^{\nu}(\chi_{]s,t]\times\Omega} u|\mathfrak{F}) \, d\nu\| = \|\int \chi_{]s,t]\times F} u \, d\nu\| \leq \mathrm{var}(\mu,]s,t]\times F).$$

Daraus folgt für alle $s \leq t \in \mathbb{R}_+$ $\|V_t - V_s\|_1 \leq \mathrm{var}(\mu,]s,t]\times\Omega)$. Dies zeigt, daß die Bedingung (3) und wegen der σ-Additivität von $\mathrm{var}(\mu,.)$ auch die Bedingung (2) von §1,2 erfüllt ist. Die $\mathfrak{F}_t$-Meßbarkeit von V_t wird wie im Beweis von §3, 2.4 Korollar 2 bewiesen. Man muß nur die prävisible durch die optionale Projektion ersetzen. Man beachte dabei, daß die optionale Projektion des Prozesses $\chi_{[0,t]\times F}$ $(F \in \mathfrak{F})$ mit dem Prozeß $\chi_{[0,t]\times\Omega} M$ übereinstimmt, wobei $M = (M_s)$ die normale Modifikation des bis auf eine Modifikation gegebenen Martingals $s \longrightarrow E(\chi_F | \mathfrak{F}_s)$ ist.

2.4 Satz: Sei E ein (RN)-Banachraum. Dann liegt derjenige Unterraum von $\mathcal{SV}(E)$, welcher von den Prozessen $V \in \mathcal{SV}(E)$ mit Werten in einem endlichdimensionalen Unterraum von E gebildet wird, dicht in $\mathcal{SV}(E)$.

Beweis: Sei $V \in \mathcal{SV}(E)$. Definiere μ_V wie in 2.2 und setze $\nu = \mathrm{var}(\mu_V,.)$. μ_V und ν erfüllen die Voraussetzungen von Satz 2.3, und für $u := d\mu_V/d\nu$ gilt $\|V\| = \mathrm{var}(\mu_V, \mathbb{R}_+\times\Omega) = \|u\|_1$. Weiter-

hin ist $u \in L_E^1(\nu)$ eine Σ_w-meßbare, Bochner-integrierbare Funktion, also ist u der Limes $u = \lim_n u_n$ einer Folge (u_n) von Σ_w-meßbaren Elementen $u_n \in L_E^1(\nu)$, die ihre Werte in einem endlichdimensionalen Unterraum von E annehmen. Setze für jedes $A \in \Sigma$ $\mu_n(A) := \int \pi_w(\chi_A)\, u_n \, d\nu$. Nach [7], Theorem 7.15 ist (μ_n) eine Folge E-wertiger Maße, derart daß μ_n und ν die Voraussetzungen von Satz 2.3 für jedes n erfüllen. Es sei $V^{(n)} = (V_t^{(n)}) \in \mathcal{V}(E)$ durch $V_t^{(n)} = h_t\, E^{\nu}(\chi_{[0,t]\times\Omega} u_n | \mathcal{F})$ definiert für jedes n wie in Satz 2.3. Es gilt $\mu_{V^{(n)}} = \mu_n$ und

$\mu_{V - V^{(n)}} = \mu_V - \mu_{V^{(n)}}$ und damit

$\|V - V^{(n)}\| = \mathrm{var}(\mu_{V - V^{(n)}}, \mathbb{R}_+ \times \Omega) = \mathrm{var}(\mu_V - \mu_{V^{(n)}}, \mathbb{R}_+ \times \Omega) = \|u - u_n\|_1$.

Hieraus folgt $\|V - V^{(n)}\| \longrightarrow 0$ für $n \to \infty$.

Der folgende Satz impliziert, daß zu jeder Folge $(V^{(n)})$ von Elementen von $\mathcal{V}(E)$, die gegen V in der $\mathcal{V}(E)$-Norm konvergiert, eine Teilfolge existiert, deren Pfade fast sicher gleichmäßig in $t \in \mathbb{R}_+$ gegen die Pfade von V konvergieren.

2.5 Satz: Es sei $V \in \mathcal{V}(E)$. Setze $f(\omega) := \sup_{t \in \mathbb{R}_+} \|V(t,\omega)\|$ für alle $\omega \in \Omega$. Dann gilt $f \in L^1(P)$ mit $\|f\|_1 \leq \|V\|$.

Beweis: Für $0 = t_1 \leq t_2 \leq \ldots \leq t_n$ und alle $\omega \in \Omega$ gilt

$\sup\{\|V(t_i,\omega)\| : i = 1, \ldots, n\} \leq \|V(0,\omega)\| + \sum_{i=1}^{n-1} \|V(t_{i+1},\omega) - V(t_i,\omega)\|$

und folglich

$f(\omega) \leq \sup\{\|V(0,\omega)\| + \sum_{i=1}^{n-1} \|V(t_{i+1},\omega) - V(t_i,\omega)\| : 0 = t_1 \leq t_2 \ldots \leq t_n\}$.

Nach der Definition von $\|V\|$ folgt daraus $\|f\|_1 \leq \|V\|$.

4.3 Hilbertraum-wertige quadratisch integrierbare Martingale: Im gesamten Abschnitt sei H stets ein Hilbertraum. Man beachte, daß Hilberträume als reflexive Banachräume die Radon-Nikodym-Eigenschaft besitzen. Wir bezeichnen den Vektorraum der quadratisch integrierbaren normalen Martingale mit Werten in H als $\mathcal{M}^2(H)$.

3.1 Satz: Es sei $M = (M_t) \in \mathcal{M}^2(H)$. Dann existiert $M_\infty = \lim_{t\to\infty} M_t$ in $L^2_H(P)$, und die Abbildung $M \longrightarrow M_\infty$ ist ein linearer Isomorphismus zwischen $\mathcal{M}^2(H)$ und $L^2_H(P)$.

Beweis: Dieser Satz folgt unmittelbar aus §3,Satz 3.1, wenn man beachtet,daß ein H-wertiges Martingal genau eine normale Modifikation besitzt.

Korollar 1: $\|M\|_2 := \lim_{t\to\infty} \|M_t\|_2 = \|M_\infty\|_2$ für alle $M \in \mathcal{M}^2(H)$ definiert eine Norm auf $\mathcal{M}^2(H)$. Mit dieser Norm ist $\mathcal{M}^2(H)$ ein Banachraum,der isometrisch isomorph zum Hilbertraum $L^2_H(P)$ ist.

Korollar 2: Der Unterraum von $\mathcal{M}^2(H)$ der Martingale mit Werten in einem endlichdimensionalen Teilraum von H liegt dicht in $\mathcal{M}^2(H)$.

Aus dem obigen Satz und §3,Satz 1.9 folgt unmittelbar

3.2 Satz: Sei $M = (M_t) \in \mathcal{M}^2(H)$. Dann existieren genau ein normales,quadratisch integrierbares reelles Martingal bezüglich der stochastischen Basis $\mathfrak{B}'$ und ein Hilbertraumisomorphismus ψ von ℓ^2 in H, derart daß $\psi\circ\phi(N_t) = M_t$ gilt P-fast sicher für alle $t \in \mathbb{R}_+$.

Da das stochastische Integral bezüglich quadratisch integrierbarer reeller Martingale wohl bekannt ist,werden wir diesen Satz dazu benutzen,den Fall Hilbertraum-wertiger Prozesse zu studieren. Wird das stochastische Integral bezüglich des reellen Martingals N des vorigen Satzes auf solche Prozesse Z eingeschränkt,die nicht von der Variablen $\omega' \in \Omega'$ abhängen,erhält man mit Hilfe von §2,Satz 3.2 den folgenden

3.3 Satz: Es sei $M = (M_t) \in \mathcal{M}^2(H)$. Es gelten die folgenden Aussagen:

(a) Es existiert ein positives Maß λ auf der σ-Algebra Σ_p der prävisiblen Mengen,das eindeutig bestimmt ist durch $\lambda(]s,t] \times F) = \|\chi_F(M_t - M_s)\|_2^2$ und $\lambda(\{0\}\times A) = \|\chi_A M_0\|_2^2$ für alle

$s \leq t$, $F \in \mathfrak{F}_s$ und $A \in \mathfrak{F}_0$. Insbesondere gilt $\lambda(\mathbb{R}_+ \times \Omega) = \|M\|_2^2$.

(b) M ist summierbar, und I_M besitzt die (B)-Eigenschaft (siehe 1) bezüglich jedes Banachraumes F, jedes Hilbertraumes G und jeder stetigen bilinearen Abbildung $B : H \times F \longrightarrow G$.

(c) Jeder prävisible reelle Prozeß $Z \in L^2(\lambda)$ ist integrierbar bezüglich M, und das stochastische Integral $Z \longrightarrow \int Z \, dM$ definiert eine Isometrie von $L^2(\lambda)$ in $\mathcal{M}^2(H)$.

Beweis: (a) Wir beachten, daß die σ-Algebra Σ_p' der prävisiblen Mengen bezüglich der stochastischen Basis $\mathcal{B}'$ die Form $\Sigma_p' = \Sigma_p \otimes \mathfrak{F}'$ hat, dh. Σ_p kann als die Unteralgebra $\Sigma_p = \{A \times \Omega' : A \in \Sigma_p\}$ von Σ_p' aufgefaßt werden. Wir schreiben $M_t = \psi \circ \phi(N_t)$ $(t \in \mathbb{R}_+)$ wie in Satz 3.2 und definieren λ' als die nach §2, Satz 3.2 existierende σ-additive Fortsetzung von $i\langle N, N\rangle = N_\infty \circ I_N$ (N_∞ als Element des Duals von $L^2(P \otimes P')$ aufgefaßt) auf Σ_p'. λ sei die Einschränkung von λ' auf Σ_p. Dann ist nach Satz 3.2 für alle $s \leq t$ und $F \in \mathfrak{F}_s$ $\lambda(]s,t] \times F) = \|\chi_F(N_t - N_s)\|_2^2 = \|\chi_F(M_t - M_s)\|_2^2$ und ebenso die weitere Gleichung von (a) erfüllt.

(b) Es gilt $I_M(A) = \psi \circ \phi(I_N(A))$ für alle $A \in \Sigma_p$. Daraus folgt die Summierbarkeit von M mit Hilfe von §2, Satz 3.2. Um den zweiten Teil der Behauptung zu beweisen, schreiben wir wie in §3,1 $L_H^2(P) = L^2(P) \tilde{\otimes}_{\mathcal{K}} H$. Wir zeigen, daß $\operatorname{svar}_B(I_M, .) \leq c \operatorname{svar}(I_M, .)$ für eine geeignete positive Konstante c gilt, woraus die (B)-Eigenschaft sofort folgt. Sei $\mathcal{A}$ die Mengenalgebra, die von Mengen der Form $]s,t] \times F$, $s \leq t$ und $F \in \mathfrak{F}_s$ erzeugt wird. Weiterhin seien A ein Element von $\mathcal{A}$ und (A_i) eine endliche Partition von A in Elemente $A_i \in \mathcal{A}$. Indem man diese Partition eventuell verfeinert, kann man annehmen, daß eine Folge (L_i) von orthogonalen Unterräumen L_i von $L^2(P)$ existiert, so daß $I_M(A_i) \in L_i \tilde{\otimes}_{\mathcal{K}} H$ für alle i ist. Also ist $B(I_M(A_i), z)$ ein Element von $L_i \tilde{\otimes}_{\mathcal{K}} G$ für alle $z \in F$ und alle i. Folglich ist für jede endliche

Folge (z_i) mit $\|z_i\| \leq 1$ von Elementen des Banachraumes F $B(I_M(A_i),z_i)$ orthogonal zu $B(I_M(A_j),z_j)$ für $i \neq j$. Wenn wir also annehmen, daß $\|B(x,z)\| \leq \|x\|\|z\|$ gilt für alle $(x,z) \in H \times F$, bekommen wir

$$\begin{aligned} \|\Sigma_i B(I_M(A_i),z_i)\|^2 &= \Sigma_i \|B(I_M(A_i),z_i)\|^2 \\ &\leq \Sigma_i \|z_i\|^2 \|I_M(A_i)\|^2 \\ &= \|\Sigma_i \|z_i\|^2 I_M(A_i)\|^2 \\ &\leq (\mathrm{svar}(I_M,A))^2 \quad . \end{aligned}$$

Hieraus folgt die Ungleichung $\mathrm{svar}_B(I_M,A) \leq \mathrm{svar}(I_M,A)$ für alle $A \in \mathcal{A}$ und wegen der σ-Additivität von I_M sogar für alle $A \in \Sigma_p$. Mit (a) und (b) ist der erste Teil der Behauptung (c) offensichtlich. Der zweite Teil dieser Behauptung ist wieder eine Konsequenz der Aussage (d) von §2, Satz 3.2, angewandt auf das reelle Martingal $N = (N_t)$.

Es seien M und N Elemente von $\mathcal{M}^2(H)$. Wir schreiben wie in §1 $M \otimes N$ für den durch $M \times N(t,\omega) = M(t,\omega) \otimes N(t,\omega)$ für alle $(t,\omega) \in \mathbb{R}_+ \times \Omega$ definierten stochastischen Prozeß und $M^{\otimes 2}$ für $M \otimes M$. Das folgende Korollar ist eine Verallgemeinerung der Ungleichung von Kunita-Watanabe (siehe [13], Ch. II, Théorème 21) auf den Fall eines Hilbertraumes.

Korollar: Es seien $M, N \in \mathcal{M}^2(H)$. Dann ist $M \otimes N$ ein Quasimartingal mit Werten in dem vervollständigten projektiven Tensorprodukt $H \tilde{\otimes}_\pi H$, und für die eindeutig gegebene Zerlegung $M \otimes N = Q + V$ von $M \otimes N$ in ein lokales Martingal $Q = (Q_t)$ mit $Q_0 = 0$ und einen prävisiblen Prozeß $V = (V_t) \in \mathcal{V}(H \tilde{\otimes}_\pi H)$ gilt $\|V\| \leq \|M\|_2 \|N\|_2$.

Beweis: Ohne Beschränkung der Allgemeinheit setzen wir $M_0 = N_0 = 0$ und H separabel voraus. $H \hat{\otimes}_\pi H$ kann als der Dual des Raumes der kompakten Operatoren von H in sich bezüglich der kanonischen Bilinearform aufgefaßt werden. (Siehe [19], Theorem 5.13). Als separabler Dual eines Banachraumes besitzt also $H \hat{\otimes}_\pi H$ die Radon-

Nikodym-Eigenschaft. Wir definieren die $H\widehat{\otimes}_\pi H$-wertige Mengenfunktion α durch $\alpha := i_{M\otimes N}$. Schreiben wir p für das Normfunktional auf H, so erhalten wir für zwei Stoppzeiten $S \leq T$

$$\|\alpha(]\!]S,T]\!]\| = \|E[(M_T - M_S)\otimes(N_T - N_S)]\| \leq E(po(M_T - M_S)\ po(N_T - N_S))$$
$$\leq \|M_T - M_S\|_2\ \|N_T - N_S\|_2$$

nach der Hölderschen Ungleichung. Bezeichnet man mit λ bzw. λ' die durch $\lambda(]\!]S,T]\!]) = \|M_T - M_S\|_2^2$ bzw. $\lambda'(]\!]S,T]\!]) = \|N_T - N_S\|_2^2$ bestimmten Maße (siehe Satz 3.3 (a)), so gilt also $\|\alpha(]\!]S,T]\!])\| \leq \sqrt{\lambda(]\!]S,T]\!])}\sqrt{\lambda'(]\!]S,T]\!])}$. Sei nun $T_1 \leq T_2 \leq \ldots \leq T_n$ eine Folge von Stoppzeiten. Aus der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung folgt

$$\Sigma_i \|\alpha(]\!]T_i,T_{i+1}]\!])\| \leq \Sigma_i \sqrt{\lambda(]\!]T_i,T_{i+1}]\!])\ \lambda'(]\!]T_i,T_{i+1}]\!])}$$
$$\leq \sqrt{\Sigma_i\ \lambda(]\!]T_i,T_{i+1}]\!])}\ \sqrt{\Sigma_i\ \lambda'(]\!]T_i,T_{i+1}]\!])}$$
$$\leq \sqrt{\lambda(\mathbb{R}_+\times\Omega)}\ \sqrt{\lambda'(\mathbb{R}_+\times\Omega)}\ .$$

Wir erhalten also mit Hilfe von Satz 3.3 (a) die Ungleichung $\mathrm{var}(\alpha,\mathbb{R}_+\times\Omega)\ \sqrt{\lambda(\mathbb{R}_+\times\Omega)}\ \sqrt{\lambda'(\mathbb{R}_+\times\Omega)} = \|M\|_2\ \|N\|_2$. Folglich ist α von beschränkter Variation und besitzt eine (eindeutige) Fortsetzung α' zu einem Maß auf Σ_p. Sei $Q + V$ die Doob-Meyer-Zerlegung von $M\otimes N$. (Siehe §3, Korollar 1 zu Satz 3.5). Nach §2, Satz 2.7 und 2.4 ist das im Sinne von Lemma 2.2 zu V assoziierte Maß μ_V die prävisible Forsetzung von α', und damit gilt $\mathrm{var}(\mu_V,\mathbb{R}_+\times\Omega) = \mathrm{var}(\alpha',\mathbb{R}_+\times\Omega)$, also nach Lemma 2.2 $\|V\| = \mathrm{var}(\alpha',\mathbb{R}_+\times\Omega) \leq \|M\|_2\ \|N\|_2$.

3.4 Definition: Seien $M, N \in \mathcal{M}^2(H)$. Der eindeutig bestimmte prävisible Prozeß $V \in \mathcal{BV}(H\widehat{\otimes}_\pi I)$, derart daß $M\otimes N - V$ ein lokales Martingal ist, werde mit $\langle M,N\rangle$ bezeichnet. $\langle M,M\rangle$ heißt die prävisible quadratische Variation von M. Es seien nun M und N normale H-wertige Prozesse, für die eine isotone Folge (T_n) von Stoppzeiten mit $\lim_n T_n = \infty$ existiert, derart daß für jedes n die zur Zeit T_n gestoppten Prozesse M^{T_n} und N^{T_n} Elemente

von $\mathcal{H}^2(H)$ sind. In diesem Fall wird $\langle M,N\rangle$ durch die für alle n gültige Gleichheit $\langle M,N\rangle^{T_n} := \langle M^{T_n}, N^{T_n}\rangle$ definiert.

Wir wollen uns nun der Zerlegung eines Martingals $M \in \mathcal{H}^2(H)$ in einen stetigen und einen rein unstetigen Anteil zuwenden.

3.5 Satz: Es sei $M \in \mathcal{H}^2(H)$. Dann besitzt M eine Zerlegung $M = M^c + M^d$ in Elemente M^c und M^d von $\mathcal{H}^2(H)$, wobei M^c ein Martingal mit stetigen Pfaden ist. Diese Zerlegung ist durch die folgende Bedingung eindeutig bestimmt: M^d_T ist orthogonal zu N_T in $L^2_H(P)$ für jedes Martingal $N \in \mathcal{H}^2(H)$ mit stetigen Pfaden und jede Stoppzeit T. Weiterhin gilt $\|M^c\|_2 \leq \|M\|_2$ und $\|M^d\|_2 \leq \|M\|_2$.

Beweis: Es sei wie in Satz 3.2 $N = (N_t)$ ein quadratisch integrierbares reelles Martingal bezüglich der stochastischen Basis $\mathfrak{B}'$, das für alle $t \in \mathbb{R}_+$ die Gleichung $M_t = \psi\circ\phi(N_t)$ erfüllt. Nach §2, Satz 2.3 existiert eine Zerlegung $N = N^c + N^d$ von N in einen stetigen und rein unstetigen Anteil. Definiere M^c und M^d durch $M^c_t := \psi\circ\phi(N^c_t)$ und $M^d_t := \psi\circ\phi(N^d_t)$ für alle $t \in \mathbb{R}_+$. Beachtet man, daß ψ und ϕ Hilbertraum-Isomorphismen sind, und daß die Pfade aller auftretenden H-wertigen Prozesse nach Korollar 1 zu §3, Satz 3.2 als relativ-kompakt vorausgesetzt werden können, so folgt die Behauptung mit Hilfe des zum Beispiel im Beweis von §3, Satz 3.1 (a) benutzten Standardarguments.

Wir bezeichnen M^c als den stetigen Anteil von M und M^d als den rein unstetigen Anteil von M. Das folgende Lemma bereitet die Erweiterung dieser Zerlegung auf Semimartingale vor.

3.6 Lemma: Die H-wertigen Quasimartingale Q bzw. Q' seien darstellbar als $Q = M + W$ bzw. $Q' = M' + W'$ mit $M, M' \in \mathcal{H}^2(H)$ und $W, W' \in \mathcal{V}(H)$. Ist $V := Q - Q'$ ein Element von $\mathcal{V}(H)$, so stimmen die stetigen Anteile M^c bzw. M'^c von M bzw. M' überein.

Beweis: Wir haben $M - M' = V + W' - W$. Nach §3,Satz 2.8 dürfen wir annehmen,daß die oben auftretenden Prozesse
ihre Werte in einem separablen Unterraum von H annehmen und deshalb können wir sogar voraussetzen,daß sie reell sind. Also ist $M - M'$ ein quadratisch integrierbares,reelles Martingal,das gleichzeitig ein Prozeß integrabler Variation ist. Der Bemerkung 2 nach §2,Satz 3.2 zufolge gilt also $(M - M')^c = 0$ und folglich $M^c - M'^c = (M - M')^c = 0$.

3.7 Satz: Es sei $X = (X_t)$ ein Semimartingal mit Werten im Hilbertraum H. Dann besitzt X eine Zerlegung $X = X^c + X^d$ in ein lokales Martingal X^c mit stetigen Pfaden und ein Semimartingal X^d. Diese Zerlegung ist eindeutig durch die folgende Bedingung bestimmt: Ist T eine Stoppzeit,so daß sich $\chi_{[\![0,T[\![}X$ in eine Summe $M + V$ mit $M \in \mathcal{M}^2(H)$ und $V \in \mathcal{FV}(H)$ zerlegen läßt,so ist der zur Zeit T gestoppte Prozeß X^c der stetige Anteil von M.

Beweis: Nach dem Korollar zu §3,Satz 3.7 existiert eine isotone Folge (T_n) von Stoppzeiten mit $\lim_n T_n = \infty$, derart daß der Prozeß $X^n := \chi_{[\![0,T_n[\![}X$ für jedes n eine Zerlegung $X^n = M^n + V^n$ mit $M^n \in \mathcal{M}^2(H)$ und $V^n \in \mathcal{FV}(H)$ besitzt. Also ist nach dem Lemma der stetige Anteil L^n des Martingals M^n unabhängig von dieser Zerlegung. Sei nun $m \geq n$. Wir beachten,daß der stetige Anteil des zur Zeit T_n gestoppten Martingals $(M^m)^{T_n}$ gerade der zur Zeit T_n gestoppte Prozeß $(L^m)^{T_n}$ ist. Nun ist der Prozeß $(X^m)^{T_n} - X^n = X^n_{T_n}\,\chi_{[\![T_n,\infty[\![}$ und folglich auch der Prozeß $(M^m)^{T_n} - M^n = X^m_{T_n}\,\chi_{[\![T_n,\infty[\![} - (V^m)^{T_n} + V^n$ ein Element von $\mathcal{FV}(H)$. Also gilt nach Lemma 3.6 für alle $m \geq n$ $(L^m)^{T_n} = L^n$. Durch $X^c(t,\omega) := \lim_n L^n(t,\omega)$ für alle $(t,\omega) \in \mathbb{R}_+ \times \Omega$ wird somit ein lokales Martingal mit stetigen Pfaden definiert. Daß X^c die Bedingung des Satzes erfüllt,sieht man durch die folgende Überlegung:

Der Prozeß $\chi_{[\![0,T[\![}X = M + V$ erfülle die Voraussetzungen dieser Bedingung. Wie im ersten Teil des Beweises überlegt man sich, daß für jedes n $(X^c)^{T\wedge T_n}$ der stetige Anteil des Martingals $M^{T\wedge T_n}$ ist. Wegen $\lim_n T_n = \infty$ folgt daraus $(X^c)^T = M^c$. Eine nochmalige Anwendung von Lemma 3.6 zeigt schließlich $(M^T)^c = M^c$. Daß X^c durch die Bedingung des Satzes eindeutig bestimmt ist, ist offensichtlich.

3.8 Definition: Das nach dem Satz eindeutig bestimmte lokale Martingal X^c wird der stetige Anteil des Semimartingals X genannt.

Zum Schluß dieses Abschnittes wird ein zu 2.5 analoger Satz für Elemente von $\mathcal{H}^2(H)$ bewiesen.

3.9 Satz: Es sei $M \in \mathcal{H}^2(H)$. Setze $f(\omega) := \sup_{t\in\mathbb{R}_+} \|M(t,\omega)\|$ für alle $\omega \in \Omega$. Dann gilt $f \in L^2(P)$ und $\|f\|_2 \leq \|M\|_2$.

Beweis: Das quadratisch integrierbare reelle Martingal $N = (N_t)$ bezüglich der stochastischen Basis $\mathcal{B}'$ sei definiert wie in Satz 3.2. Nach der Doobschen Maximalungleichung ([7], Theorem 4.11) ist die auf $\Omega\times\Omega' = \Omega\times\mathbb{N}$ definierte Zufallsvariable $\sup_{t\in\mathbb{R}_+} |N_t|$ ein Element von $L^2(P\otimes P')$ mit einer Norm $\leq \|N\|_2$. Wegen $M_t = \psi\circ\phi(N_t)$ für alle $t \in \mathbb{R}_+$ gilt also

$$\begin{aligned}\|f\|_2^2 &= \int \sup_{t\in\mathbb{R}_+} \|M(t,\omega)\|^2 \, dP(\omega)\\ &\leq \int \sup_{t\in\mathbb{R}_+} \left(\Sigma_n |N_t(\omega,n)|^2\right) dP(\omega)\\ &\leq \|\sup_{t\in\mathbb{R}_+} |N_t|\|_2^2 \leq \|N\|_2^2 = \|M\|_2^2 .\end{aligned}$$

4. Die Itô-Formel für Semimartingale mit Werten in einem Hilbertraum: Der vorliegende Abschnitt ist dem Beweis des Satzes über die Itô-Formel gewidmet, auf der der Kalkül des stochastischen Integrals begründet ist. In §2 wurde bereits eine für unsere Studien geeignete Formulierung der Formel für den Fall eines endlichdimensionalen Raumes angegeben. Die bisher angegebenen Versionen für den Fall Hilbertraum-wertiger Prozesse ([6], Theorem 3, [5], Theo-

reme D-1 und D-3 ,[11] ,7.1 Theorem 11) sind nicht allgemein genug, um diese Formel zu verallgemeinern. In allen Fällen ist die Funktion F Einschränkungen des Types unterworfen,daß F zusammen mit ihren Ableitungen beschränkt ist,oder daß die Ableitungen von F auf beschränkten Mengen des Hilbert-Raumes gleichmäßig stetig sind. Auch die Klasse der Prozesse,auf die die Formel angewandt werden kann ist soweit eingeschränkt worden,daß sie nicht einmal alle Martingale enthält.

Die in den vorangegangenen Paragraphen gewonnenen Struktur- und Regularitätssätze für Semimartingale erlauben es uns,im folgenden eine Version der Itô-Formel für den Fall eines Hilbertraumes H anzugeben,die die für den Spezialfall $H = \mathbb{R}^n$ bekannte verallgemeinert. Unser Beweis unterscheidet sich von den bisher in den Zitaten angegebenen dadurch,daß sie aus der Formel für den endlichdimensionalen Fall direkt durch Approximation gewonnen wird.

4.1 Satz (Itô-Formel): Es sei $X = (X_t)$ ein Semimartingal mit Werten im Hilbertraum H . G sei ein weiterer Hilbertraum und F eine zweifach stetig differenzierbare Funktion von H in G . Dann ist FoX ein Semimartingal,und es gilt die Gleichheit (IF)

$$FoX_t = FoX_o + \int_{]0,t]} DFoX_{s-}\, dX_s + 1/2 \int_{]0,t]} D^2FoX_{s-}\, d\langle X^c, X^c\rangle_s$$
$$+ \sum_{0<s\le t} [FoX_s - FoX_{s-} - DFoX_{s-}(\Delta X_s)]$$

P-fast sicher für alle $t \in \mathbb{R}_+$, wobei die auftretenden Integrale stochastische Integrale sind,und die Summe (fast sicher) absolut in G konvergiert.

Bemerkungen: 1) $DF(x)$ bzw. $D^2F(x)$ sind die erste bzw. zweite Ableitung von F an der Stelle x . Man beachte,daß $DF(x)$ ein Element von $\mathfrak{L}(H,G)$ ist. Ebenso ist $D^2F(x)$ ein Element von $\mathfrak{L}(H, \mathfrak{L}(H,G))$. Dieser Raum kann mit $\mathfrak{L}(H \tilde{\otimes}_\pi H , G)$ identifiziert

werden. Also sind die zu den stochastischen Integralen gehörigen bilinearen Abbildungen die kanonischen bilinearen Abbildungen.

2) $X_- = (X_{s-})$ ist der durch $X_-(s,\omega) = \lim_{u \to s, u<s} X(u,\omega)$ für alle $(s,\omega) \in \mathbb{R}_+ \times \Omega$ definierte stochastische Prozeß, und $\Delta X_s = X_s - X_{s-}$.

3) Man muß die Gleichheit (IF) im Satz richtig interpretieren: Da beide Seiten normale Prozesse definieren, sind die durch sie definierten Prozesse ununterscheidbar.

4) X^c ist der stetige Anteil des Semimartingals X. (Siehe Definition 3.8). Die quadratische Variation $\langle X^c, X^c \rangle$ von X^c ist in 3.4 definiert.

Beweis: Der Beweis des Satzes ist in zwei Teile gegliedert. Zuerst zeigen wir, daß die rechte Seite von (IF) wohldefiniert ist, danach die Gleichheit (IF). Wichtige Beweisschritte sind als Lemmata formuliert.

(1) Lemma: Die Integrale auf der rechten Seite von (IF) sind wohldefiniert.

Beweis: $X_- = (X_{s-})$ besitzt linksseitig stetige Pfade, ist also ein prävisibler Prozeß. Weiterhin folgt aus §3,3.7 Korollar, daß X_- seine Werte in einem separablen Unterraum von H annimmt. Darüberhinaus ist X_- lokal beschränkt, was man leicht einsieht, wenn man die durch $T_n(\omega) = \inf \{t \in \mathbb{R}_+ : \|X_{s-}(\omega)\| \geq n\}$ definierte Folge (T_n) von Stoppzeiten betrachtet. Da die Funktionen DF und D^2F stetig auf H sind, gelten analoge Aussagen für $DFoX_-$ und D^2FoX_-. Nach §3,3.7 Korollar, 2.1 Korollar und Satz 3.3 (b) ist also $DFoX_-$ lokal integrierbar bezüglich $X = (X_t)$. $\langle X^c, X^c \rangle$ ist ein Prozeß von beschränkter Variation, also ist auch D^2FoX_- lokal integrierbar bezüglich $\langle X^c, X^c \rangle$ nach 2.1 Korollar.

Um die Konvergenz der Summe zeigen zu können, müssen wir zwei Lemmata vorschalten.

(2) Lemma: Seien $M \in \mathcal{M}^2(H)$, p das Normfunktional auf H . Dann ist die Summe $\Sigma_s (po\Delta M_s)^2$ P-fast sicher endlich,und $[\Sigma_s (po\Delta M_s)^2]^{1/2}$ definiert ein Element von $L^2(P)$ mit einer Norm $\leq \|M\|_2$.

Beweis: Die Aussage des Lemmas ist für den Fall $H=\mathbb{R}$ wohlbekannt.(Siehe zBsp. [13],Chap.II,Théorème 13).Für den Fall eines Hilbertraumes H können wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit H separabel und folglich $H = \ell^2$ voraussetzen. Es sei N das quadratisch integrierbare reelle Martingal bezüglich der stochastischen Basis $\mathfrak{B}'$, das $M_t = \phi o(N_t)$ für alle $t \in \mathbb{R}_+$ erfüllt.(Siehe Satz 3.2). Es gilt

$$\Sigma_s \| M_s(\omega)\|^2 = \Sigma_s \int |\Delta N_s(\omega,\omega')|^2 \, dP'(\omega')$$
$$= \int (\Sigma_s |\Delta N_s(\omega,\omega')|^2) \, dP'(\omega')$$

für alle $\omega \in \Omega$. Da N die Aussage des Lemmas erfüllt,ist $\Sigma_s |\Delta N_s|^2$ ein Element von $L^1(P \otimes P')$ der Norm $\leq \|N\|_2^2$. Folglich ist nach dem Satz von Fubini $[\Sigma_s (po\Delta M_s)^2]^{1/2}$ ein Element von $L^2(P)$ mit einer Norm $\leq \|N\|_2 = \|M\|_2$.

(3) Lemma: Es sei $V=(V_t)$ ein Element von $\mathcal{SV}(H)$. Dann existiert ein positives $f \in L^1(P)$ mit $\|f\|_1 \leq 4\|V\|$, derart daß für jedes $t \in \mathbb{R}_+$ $\Sigma_{s \leq t} (po\Delta V_s)^2 \leq f^2$ P-fast sicher gilt.

Beweis: Wir können wieder annehmen,daß V seine Werte in dem (RN)-Banachverband ℓ^2 annimmt,und wir beachten,daß für zwei positive Elemente x und y von ℓ^2 die Ungleichung $p(x+y)^2 \geq p(x)^2 + p(y)^2$ gilt . Aus Satz 2.3 folgert man,daß V die Differenz $V = V^+ - V^-$ zweier Prozesse V^+ und V^- aus $\mathcal{SV}(\ell^2)$ mit positiven isotonen Pfaden sowie $\|V^+\| \leq \|V\|$ und $\|V^-\| \leq \|V\|$ ist. Man braucht dazu nur $u = d\mu_V/d|\mu_V|$ in 2.3 in Positiv- und Negativteil zerlegen und V_t^+ bzw. V_t^- für alle $t \in \mathbb{R}_+$ durch $V_t^+ = h_t \, E^{|\mu_V|}(\chi_{[0,t] \times \Omega} u^+ | \mathfrak{F})$ bzw. $V_t^- = h_t \, E^{|\mu_V|}(\chi_{[0,t] \times \Omega} u^- | \mathfrak{F})$ zu definieren . Die Normbedingung folgt aus

$\|V^+\| = \mathrm{var}(\mu_{V^+}, \mathbb{R}_+ \times \Omega) = \|u^+\|_1$ bzw. $\|V^-\| = \mathrm{var}(\mu_{V^-}, \mathbb{R}_+ \times \Omega) = \|u^-\|_1$.
Für V^+ erhalten wir mit Hilfe der Ungleichung am Anfang des Beweises $\Sigma_{s \le t} \|\Delta V_s^+(\omega)\|^2 \le \|\Sigma_{s \le t} \Delta V_s^+(\omega)\|^2 \le \|2\, V_t^+(\omega)\|^2$ sowie die analoge Ungleichung für V^- . Wir können also
$f = \sup_{t \in \mathbb{R}_+} \mathrm{po} V_t^+ + \sup_{t \in \mathbb{R}_+} \mathrm{po} V_t^-$ setzen .

(4) Lemma: Die Summe $\Sigma_{0<s\le t} [\mathrm{Fo}X_s - \mathrm{Fo}X_{s-} - \mathrm{DFo}X_{s-}(\Delta X_s)]$ aus (IF) ist P-fast sicher

Beweis: §3,3.7 Korollar liefert eine isotone Folge (S_n) von Stoppzeiten mit $\lim_n S_n = \infty$, so daß für jedes n $\chi_{[\![0,S_n]\!]} X$ als eine Summe $M^{(n)} + V^{(n)}$ eines quadratisch integrierbaren Martingals $M^{(n)}$ und eines Prozesses $V^{(n)}$ von integrabler Variation dargestellt werden kann . Wir können also annehmen,daß $X = M + V$ mit $M \in \mathcal{M}^2(H)$ und $V \in \mathcal{FV}(H)$ gilt.Nach der Formel von Taylor erhält man $F(x+y) = F(x) + DF(x)y + \int_0^1 (1-\xi)\, D^2F(x+\xi y)\, d\xi\, (y,y)$ für alle $(x,y) \in H \times H$ und folglich,falls D^2F in der Norm durch eine Konstante c beschränkt ist,
$\|F(x+y) - F(x) - DF(x)y\| \le \int_0^1 (1-\xi)\, c\, \|y\|^2\, d\xi \le c/2\, \|y\|^2$. Für die Summe liefert dies

$$\Sigma_{s \le t} \|\mathrm{Fo}X_s(\omega) - \mathrm{Fo}X_{s-}(\omega) - \mathrm{DFo}X_{s-}(\omega)(\Delta X_s(\omega))\| \le$$
$$\le c/2\ \Sigma_{s \le t} \|\Delta X_s(\omega)\|^2$$
$$\le c\ [\Sigma_{s \le t} \|\Delta M_s(\omega)\|^2 + \Sigma_{s \le t} \|\Delta V_s(\omega)\|^2]$$

für alle $\omega \in \Omega$. Also ist nach den beiden vorhergehenden Hilfssätzen das Lemma unter der Einschränkung bewiesen,daß D^2F beschränkt ist.Diese Einschränkung kann durch optionales Stoppen des Prozesses X beseitigt werden. Es sei daran erinnert,daß ohne Beschränkung der Allgemeinheit X als Quasimartingal der Klasse (D) vorausgesetzt wurde. Nach §3,Satz 2.6 existieren ein positives normales Martingal $M = (M_t)$ und eine konvexe kompakte Teilmenge $K \subseteq H$, so daß $X(t,\omega) \in M(t,\omega)\, K$ für alle $(t,\omega) \in \mathbb{R}_+ \times \Omega$

gilt. Definiere die Folge (T_n) von Stoppzeiten durch $T_n(\omega) = \inf\{t \in \mathbb{R}_+ : M(t,\omega) \geqslant n\}$ für alle $\omega \in \Omega$. Dann gilt $\lim_n T_n = \infty$. Es genügt also die Konvergenz der fraglichen Summe für die Prozesse $X^{(n)} = \chi_{[\![0,T_n[\![} X$ zu zeigen. Nun nimmt aber $X^{(n)}$ und damit auch $X^{(n)}_-$ Werte in nK an. Da die Funktion D^2F auf der Menge $3nK$ beschränkt ist, ergibt dies die geforderte Ungleichung auch dann, wenn D^2F nicht auf ganz H beschränkt ist.

Wir kommen nun zum eigentlichen Beweis von (IF). Der Beweis besteht darin, von der Gültigkeit von (IF) für gewisse, einfach gebaute Semimartingale auf die Allgemeingültigkeit zu schließen. Diese Methode des Vorgehens wurde schon von P.A.Meyer ([13], Chap. III, 3ff) beim Beweis der Itô-Formel für reelle Prozesse angewandt.

In den folgenden drei Lemmata werden wir zeigen, daß die Allgemeinheit nicht eingeschränkt wird, wenn wir (IF) unter den unten stehenden Voraussetzungen (5) - (7) beweisen.

(5) H ist ein separabler Hilbertraum

(6) X ist ein Quasimartingal, das als Summe $X = M + V$ eines quadratisch integrierbaren Martingals $M \in \mathcal{H}^2(H)$ und eines Prozesses von integrabler Variation $V \in \mathcal{FV}(H)$ dargestellt werden kann.

(7) F, DF und D^2F sind in den entsprechenden Normen beschränkt.

Daß die Annahme (5) die Allgemeinheit nicht einschränkt, folgt mit Hilfe von §3, Satz 2.6 aus der Definition des Semimartingals. Die folgenden drei Lemmata werden die Annahmen (6) und (7) rechtfertigen.

(8) Lemma: Sei (T_n) eine isotone Folge von Stoppzeiten mit $\lim_n T_n = \infty$, derart daß für jedes n $X^{(n)} := \chi_{[\![0,T_n[\![} X$ ein Quasimartingal der Klasse (D) ist. Falls (IF) für $X^{(n)}$ gilt für jedes n, so gilt (IF) auch für den Prozeß X.

Beweis: Wir beachten, daß nach Lemma 3.6 für alle $m \geq n$ die Gleichheit $X^{(n)c} = (X^{(m)c})^{T_n} = (X^c)^{T_n}$ gilt. Damit haben wir $\langle X^{(n)c}, X^{(n)c}\rangle = \langle X^{(m)c}, X^{(m)c}\rangle^{T_n} = \langle X^c, X^c\rangle^{T_n}$, und das Lemma ist eine unmittelbare Konsequenz aus der Definition der lokalen Integration (1.6).

(9) Lemma: Gilt (IF) für jedes Quasimartingal, welches (6) erfüllt, so gilt (IF) auch für jedes Semimartingal.

Beweis: Mit Hilfe des vorhergehenden folgt das obige Lemma unmittelbar aus §3, 3.7 Korollar.

(10) Lemma: Ist (IF) gültig für alle zweifach differenzierbaren Funktionen F, welche (7) erfüllen, dann gilt (IF) auch ohne diese Einschränkung.

Beweis: Nach Lemma (9) genügt es, die Implikation für Quasimartingale X zu beweisen, die (6) erfüllen. Wie im letzten Teil des Beweises von Lemma (4) sieht man, daß §3, Satz 2.6 eine isotone Folge (T_n) von Stoppzeiten mit $\lim_n T_n = \infty$ liefert, derart daß die Prozesse $\chi_{[\![0,T_n]\!]}{}^M$ und $\chi_{[\![0,T_n]\!]}{}^V$ ihre Werte in einer kompakten Teilmenge K des separablen Hilbertraumes H annehmen. Erneute Anwendung von Lemma (8) rechtfertigt also die Annahme, daß X seine Werte in K annimmt. Nun ist F wie die Ableitungen DF und D^2F beschränkt auf K. Da H ein separabler Hilbertraum ist, können wir F durch eine zweimal stetig differenzierbare Funktion G ersetzen, die (7) erfüllt und für die $G(x) = F(x)$, $DG(x) = DF(x)$ und $D^2G(x) = D^2F(x)$ für alle $x \in K$ gilt. (Siehe [8], II, §3, Theorem 2). Die Gültigkeit von (IF) für G impliziert offensichtlich die Gültigkeit von (IF) für F.

(11) Lemma: Gilt (IF) für alle Quasimartingale der Form $Q = M + V$, wobei M eine dichte Teilmenge von $\mathcal{M}^2(H)$ und V eine dichte Teilmenge von $\mathcal{V}(H)$ durchlaufen, so gilt (IF) für alle Semimartingale.

Beweis: Nach den beiden vorausgegangenen Lemmata genügt es (IF)

für den Fall zu zeigen,daß F , DF und D^2F durch eine Konstante c normbeschränkt sind,und daß $X = M + V$ mit $M \in \mathcal{M}^2(H)$ und $V \in \mathcal{SV}(H)$ gilt.Es ist klar,daß wir $X_o = M_o = V_o = 0$ annehmen können. Es sei also $X^n = M^n + V^n$ eine Folge von Quasimartingalen,welche die folgende Bedingung erfüllen:

(12) Es gilt $X^n_o = M^n_o = V^n_o = 0$, $M^n \in \mathcal{M}^2(H)$ mit $\Sigma_n \| M^n - M \|_2 < \infty$, $V^n \in \mathcal{SV}(H)$ mit $\Sigma_n \| V^n - V \| < \infty$, und X^n erfüllt (IF) für alle n.

Nach den Sätzen 3.9 und 2.5 konvergieren die Prozesse M^n und V^n fast sicher pfadweise gegen die Prozesse M bzw. V , also gilt:

(13) Für jedes $t \in \mathbb{R}_+$ konvergiert mit $n \to \infty$ FoX^n_t fast sicher gegen FoX_t .

Als nächstes betrachten wir die Differenzen

$u^n_1 = \int_{]0,t]} DFoX^n_{s-}\, dM^n_s - \int_{]0,t]} DFoX_{s-}\, dM_s$. Wir zeigen,daß $\lim_n u^n_1 = 0$ in $L^2_G(P)$ gilt . Dazu schreiben wir $u^n_1 = u^n_2 - u^n_3$ mit $u^n_2 = \int_{]0,t]} DFoX^n_{s-} - DFoX_{s-}\, dM_s$ und $u^n_3 = \int_{]0,t]} DFoX^n_{s-}\, d(M^n_s - M_s)$.

Nach dem Satz von der majorisierten Konvergenz (siehe [1],Theorem 7) gilt $u^n_2 \to 0$ in der $L^2_G(P)$- Norm.Beachte nun,daß B die kanonische bilineare Abbildung von $Hx\mathcal{L}(H,G)$ in G ist.Im Beweis von Satz 3.4 wurde gezeigt,daß $svar_B(I_{(M^n-M)}, \mathbb{R}_+ x\Omega) = svar(I_{(M^n-M)}, \mathbb{R}_+ x\Omega)$ gilt,und nach Satz 3.4 haben wir $svar(I_{(M^n-M)}, \mathbb{R}_+ x\Omega) = \| M^n - M \|_2$. Da DF durch c in der Norm beschränkt ist,gilt $\| u^n_3 \|_2 \le c\ svar_B(I_{(M^n-M)}, \mathbb{R}_+ x\Omega) = c \| M^n - M \|_2$ dh. $u^n_3 \to 0$. Damit haben wir

(14) $\lim_n u^n_1 = 0$ in $L^2_G(P)$.

Ein völlig analoger wegen der Beschränktheit der Variation von I_V eher noch einfacherer Beweis liefert

(15) $u^n_4 := \int_{]0,t]} DFoX^n_{s-}\, dV^n_s - \int_{]0,t]} DFoX_{s-}\, dV_s$ konvergiert für $n \to \infty$ gegen 0 in $L^1_G(P)$.

Als nächstes beweisen wir

(16) $u^n_5 := \int_{]0,t]} D^2FoX^n_{s-}\, d\langle X^{nc}, X^{nc}\rangle - \int_{]0,t]} D^2FoX_{s-}\, d\langle X^c, X^c\rangle$ kon-

vergiert für $n \longrightarrow \infty$ gegen 0 .

Wenn wir zeigen können, daß $\langle X^{nc}, X^{nc} \rangle$ gegen $\langle X^c, X^c \rangle$ in $\mathcal{SV}(H \otimes_\pi H)$ konvergiert, dann verläuft der Beweis dieser Behauptung ebenso wie der Beweis der Behauptung (15). Nun gilt nach Lemma 3.6 $M^c = X^c$ und $M^{nc} = X^{nc}$ für alle n. Weiterhin gilt nach Satz 3.5 $\| M^c - M^{nc} \|_2 \longrightarrow 0$ für $n \to \infty$. Wir haben aber

$$\langle M^{nc}, M^{nc} \rangle - \langle M^c, M^c \rangle = \langle M^{nc}, M^{nc} - M^c \rangle - \langle M^c - M^{nc}, M^c \rangle ,$$

also nach 3.3 Korollar

$$\| \langle M^{nc}, M^{nc} \rangle - \langle M^c, M^c \rangle \| \leq (\| M^{nc} \|_2 + \| M^c \|_2) \| M^c - M^{nc} \|_2 ,$$

womit die Behauptung (16) bewiesen ist.

Als letztes müssen wir noch die folgenden Summen abschätzen, wobei p bzw. q die Normfunktionale auf H bzw. G sind:

$$u_\delta^n = \sum_{s \leq t} q o (F o X_s^n - F o X_{s-}^n - DF o X_{s-}^n (\Delta X_s^n) - F o X_s + F o X_{s-} + DF o X_{s-} (\Delta X_s)) .$$

Nach Lemma (4) ist u_δ^n fast sicher endlich. Wir können deshalb für festes $\omega \in \Omega$ annehmen, daß nur abzählbar viele Glieder der Summe ungleich Null sind. Da die Prozesse X^n nach den Sätzen 3.9 und 2.5 fast sicher pfadweise gleichmäßig in $t \in \mathbb{R}_+$ gegen X konvergieren, kann weiterhin vorausgesetzt werden, daß jedes dieser Glieder für $n \to \infty$ gegen 0 konvergiert. Wird also gezeigt, daß $\sup u_\delta^n$ durch eine fast sicher endliche Funktion f majorisiert wird, dann gilt

(17) $\lim_n u_\delta^n = 0$ P-fast sicher .

Nun ist D^2F in der Norm durch eine Konstante c beschränkt. Wie im Beweis von Lemma (4) zeigt man mit Hilfe der Formel von Taylor, daß $u_\delta^n \leq c/2 \sum_{s \leq t} [p o (\Delta X_s)^2 + p o (\Delta X_s^n)^2]$ gilt. Da nach den Hilfssätzen (2) und (3) $\sum_{s \leq t} p o (\Delta X_s)^2$ fast sicher endlich ist, bleibt zu zeigen, daß $\sup_n (\sum_{s \leq t} p o (\Delta X_s^n)^2)$ P-fast sicher endlich ist. Dh. wir müssen zeigen, daß die beiden Suprema $\sup_n (\sum_{s \leq t} p o (\Delta M_s^n)^2)$ und $\sup_n (\sum_{s \leq t} p o (\Delta V_s^n)^2)$ P-fast sicher endlich sind .

Für das zweite Supremum bekommen wir nach Lemma (3)

$$\sup_n \left(\Sigma_{s \leq t} \, po(\Delta V_s^n)^2 \right) \leq 2 \left[\Sigma_{s \leq t} \, po(\Delta V_s)^2 + \Sigma_n \Sigma_{s \leq t} \, po(\Delta(V_s^n - V_s))^2 \right.$$

$$\left. \leq 8 \left[f^2 + \Sigma_n f_n^2 \right] \right.,$$

wobei f und f_n integrierbare Funktionen mit $\| f \|_1 \leq 4 \| V \|$ und $\| f_n \|_1 \leq 4 \| V^n - V \|$ sind. Nach (12) ist das obige Supremum also fast sicher endlich. Argumentiert man für $\sup_n (\Sigma_{s \leq t} \, po(\Delta M_s^n)^2)$ analog, indem man anstelle von (3) Lemma (2) zur Hilfe nimmt, so erhält man auch in diesem Fall die fast sichere Endlichkeit. Damit ist auch die Behauptung (17) bewiesen. Nimmt man die Aussagen (13) - (17) zusammen, so sieht man durch Übergang zum Limes, daß die Itô-Formel (IF) auch für $X = M + V$ gilt. Das war aber zu beweisen.

Mit diesem letzten Lemma ist aber (IF) in der in Satz 4.1 behaupteten allgemeinen Form bewiesen. Nach 3.1 Korollar 2 liegen nämlich die quadratisch integrierbaren Martingale, die ihre Werte in einem endlichdimensionalen Unterraum von H annehmen, dicht in $\mathcal{L}^2(H)$, und nach Satz 2.4 bilden die Prozesse integrabler Variation mit Werten in einem endlichdimensionalen Unterraum von H einen dichten Teilraum von $\mathcal{BV}(H)$. Für den endlichdimensionalen Fall gilt aber (IF) nach §2, Satz 4.13. Wendet man also nun noch Lemma (11) an, so ist Satz 4.1 vollständig bewiesen.

Literaturverzeichnis

[1] Bartle R.G. A general bilinear vector integral . Studia Math. 15, 337 - 352 , (1956) .

[2] Chatterji S.D. Martingale convergence and the Radon-Nikodym Theorem in Banach spaces . Math.Scand. 22 , 21 - 41 , (1968) .

[3] Dellacherie C. Capacités et processus stochastiques . Ergebnisse der Mathematik,Band 67 . Berlin,Heidelberg,New-York: Springer , (1972).

[4] Doléans-Dade C. und Meyer P.A. Intégrales stochastiques par rapport aux martingales locales . In Séminaire de Probabilités IV , Lecture Notes in Mathematics . Berlin,Heidelberg,New-York: Springer , (1970) , 79 - 107 .

[5] Graveraux J.B. und Pellaumail J. Formule de Ito pour des processus non continues à valeurs dans des espaces de Banach . Ann.Inst.Henri Poincaré X , 399 - 422 , (1974) .

[6] Kunita H. Stochastic integrals based on martingales taking values in a Hilbert space . Nagoya Math.J. 38, 41 - 52 , (1970) .

[7] Kussmaul A.U. Stochastic integration and generalized martingales . London: Pitman , (1977) .

[8] Lang S. Introduction to differentiable manifolds . New-York: John Wiley & Sons , (1966) .

[9] Lewis D.R. A vector measure with no derivative . Proc. Amer.Math.Soc. 32 , 535 - 536 , (1972) .

[10] Métivier M. Martingales à valeurs vectorielles.Applications à la dérivation des mesures vectorielles . Ann.Inst. Fourier XVIII , 175 - 208 , (1967) .

[11] Métivier M. The stochastic integral with respect to processes with values in a reflexive Banach space . Theory Prob.Appl. XIX , 758 - 787, (1974) .

[12] Métivier M. und Pellaumail J. On Doléans-Föllmer's measure for quasimartingales . Ill.J.Math. 19 , 491 - 504 , (1975) .

[13] Meyer P.A. Un cours sur les intégrales stochastiques . In Séminaire de Probabilités X , Lecture Notes in Mathematics . Berlin,Heidelberg,New-York: Springer , (1976) , 245 - 400 .

[14] Orey S. F-processes . In 5th Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability II , vol 1 , 301 - 314 , (1965) .

[15] Pellaumail J. Sur l'integrale stochastique et la décomposition de Doob-Meyer . Astérisque 9 , Société mathématique de France , (1973).

[16] Scalora F. Abstract martingale convergence theorems . Pac.J.Math. 11 , 347 - 374 , (1961) .

[17] Schaefer H.H. Banach lattices and positive operators . Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften in Einzeldarstellungen,Band 215 . Berlin,Heidelberg,New-York: Springer , (1974) .

[18] Schaefer H.H. Topological vector spaces . New-York: Macmillan , (1966) .

[19] Schatten R. A theory of cross spaces . Ann.Math.Studies 26 , (1950) .

[20] Yor M. Sur les intégrales stochastiques à valeurs dans un espace de Banach . C.R.Acad.Sci.Paris,t. 277 ,série A , 467 , (1973) .

Lebenslauf

Am 12. Februar 1947 wurde ich, Alfred Kußmaul, als Sohn des Schreinermeisters Alfred Kußmaul und seiner Ehefrau Anna, geb. Schmid, in Stuttgart geboren. Kurz nach meiner Geburt zogen meine Eltern nach Kirchheim-Teck (Kreis Esslingen), wo ich von April 1953 bis April 1957 die Volksschule und danach das Schloßgymnasium Kirchheim-Teck besuchte. Am 25. Februar 1966 bestand ich die Reifeprüfung.

Nach einem Semester Physik-Studium an der Universität Tübingen wurde ich im Oktober 1966 zur Bundeswehr einberufen. Im Anschluß an meinen 18-monatigen Wehrdienst nahm ich im SS 1968 an der Universität Tübingen das Studium der Physik wieder auf, wechselte jedoch im darauffolgenden Wintersemester zum Fach Mathematik. Im Oktober 1970 legte ich die Diplom-Vorprüfung und im Dezember 1973 die Diplomprüfung in Mathematik ab.

Schon während meines Studiums und danach bis Ende Februar 1974 war ich am Mathematischen Institut der Universität Tübingen als wissenschaftliche Hilfskraft tätig. Nach meiner Diplomprüfung begann ich mich auf Anregung von Prof. H. Heyer in die Theorie der stochastischen Integration einzuarbeiten. Vom 1. März an bis zum Ende des Jahres 1974 erhielt ich ein Stipendium der Graduiertenförderung. Die folgenden beiden Jahre war ich Research Assistant von Prof. R.J. Elliott an der University of Hull (England).

Im Januar 1977 kehrte ich nach Deutschland zurück. Seit Februar desselben Jahres bin ich als Wissenschaftlicher Angestellter am Mathematischen Institut der Universität Tübingen tätig. In dieser Zeit entstand unter der Anleitung von Herrn Prof. H. Heyer meine Dissertation "Regularität und stochastische Integration von Semimartingalen mit Werten in einem Banachraum".

Meine akademischen Lehrer waren in Mathematik die Herren Professoren D. Barnes, H. Heyer, E. Meister, G. Michler, R. Nagel, H. Salzmann, H.H. Schaefer, H. Wielandt, in Physik W. Güttinger, H. Krüger, F. Lenz und E. Pfaffelhuber.

Veröffentlichung: Stochastic integration and generalized martingales. London: Pitman, (1977).